PARABOLIČKE PDJ

JEDNAŽBA PROVOĐENJA TOPLINE

Promatrajmo strujanje topline u homogenom štapu duljine *L*. Ako je $u(x,t)$ tempera-tura štapa na udaljenosti *x* u trenutku *t*, jednadžba za *u* glasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{za } 0 < x < L;\ t > 0 \tag{2.27a}$$

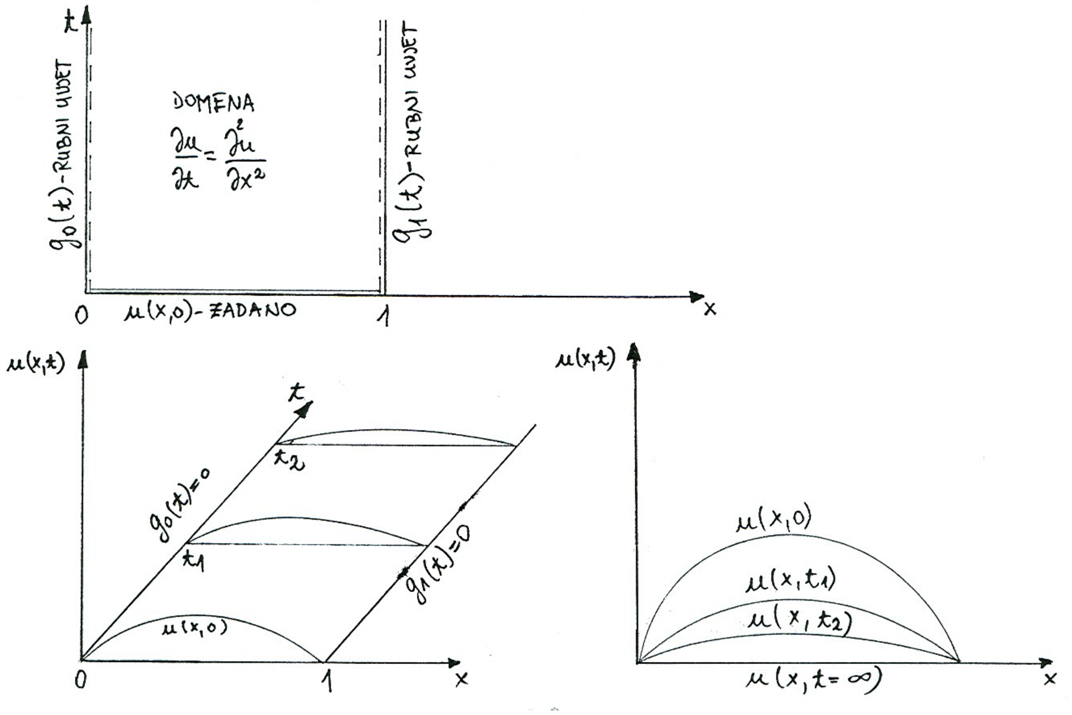
Početni raspored temperature

$$u(x,0) \quad ,\ 0 < x < L \tag{2.27b}$$

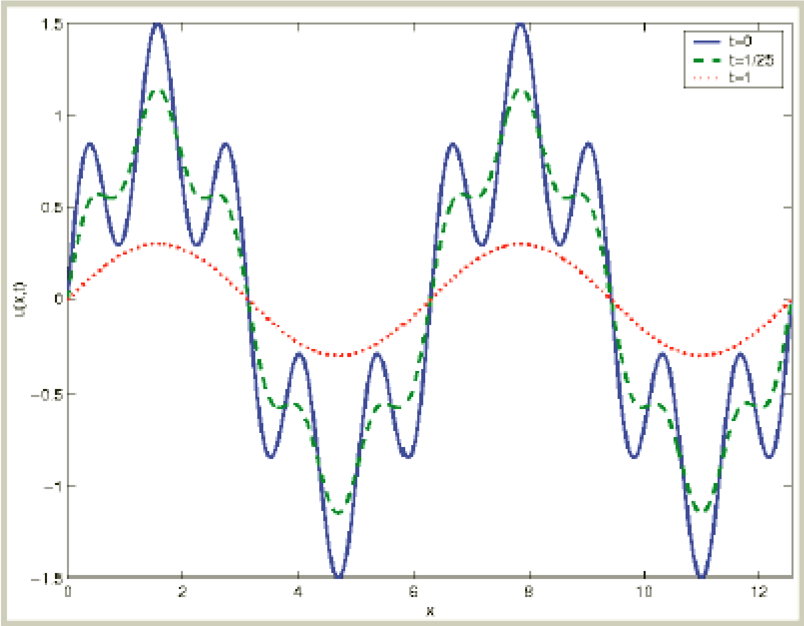
je **početni uvjet** koji je potrebno zadati. Osim toga, potrebno je zadati rubne uvjete tj. temperaturu na krajevima štapa. **Rubni** se **uvjeti** zadaju u obliku

$$u(0,t) = g_0(t) \ \text{ i } \ u(L,t) = g_1(t). \tag{2.27c}$$

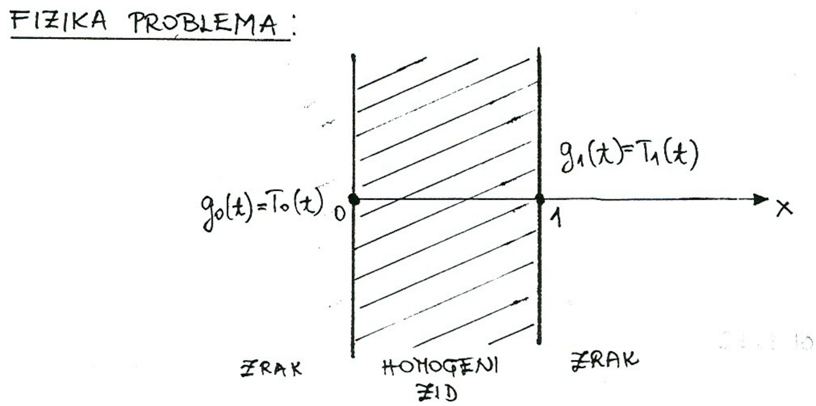
(2.27a)-(2.27c) je **inicijalno rubni problem za jednažbu provođenja.**



Slika 2.12a. Matematički model i izgled rješenja



Slika 2.12b. Karakterizacija rješenja jednadžbe provođenja topline:
(u primjeru su postavljeni periodički rubni uvjeti; dolazi do disipacije rješenja)



Slika 2.12c. Fizikalni model

Općenito, jednadžbu provođenja topline možemo zapisati u obliku

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Ovdje je k koeficijent toplinske vodljivosti. S obzirom na koeficijent k dobivamo različite diferencijalne jednadžbe.

a) k = const. (homogeni zid)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

b) $k = k(x)$ (nehomogena struktura zida)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k'(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + k(x)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

c) $k = k(x,u)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$ - nelinearna jednadžba provođenja

$$u = u(x,y,t)$$

Hlađenje 2D tijela: $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$ - nestacionaran problem

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$ - stacionaran problem (t $\to \infty$)

k_x, k_y - koeficijenti provođenja topline u x i y smjeru

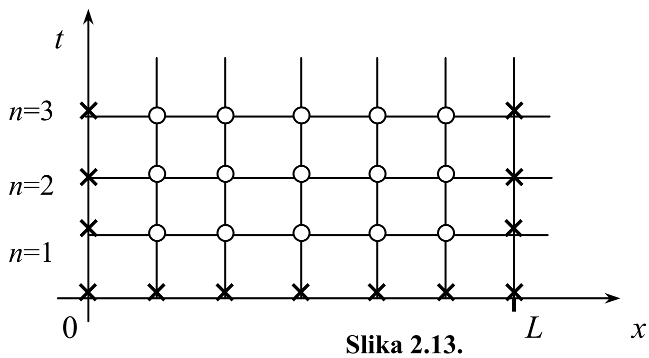
$$u = u(x,y,z,t)$$

Hlađenje 3D tijela: $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$k_x = k_y = k_z = k$$

NUMERIČKO RJEŠAVANJE JEDNAŽBE PROVOĐENJA U 1D

Tražimo rješenje problema (2.27a)-(2.27c). Prvi je korak diskretizacija numeričke domene u (*x,t*) ravnini. Pretpostavimo da je širina numeričke mreže u smjeru *x* jednaka Δx, a da je odabrani vremenski korak jednak Δt. Primjer numeričke mreže prikazan je na Slici 2.13. Vrijednosti u točkama mreže koje su označene s kružićima potrebno je odrediti na osnovu dane diferencijalne jednadžbe, dok su vrijednosti u točkama označene s križićima poznate iz postavljenih početnih i rubnih uvjeta.



Slika 2.13.

Uvedimo oznaku $u_i^n = u(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$.

a) Eksplicitna shema

Parcijalne derivacije koje se pojavljuju u danoj PDJ, u svakoj točki mreže aproksimiramo pomoću konačnih razlika. Za aproksimaciju vremenske derivacije uzimamo

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=n\Delta t} \cong \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \tag{2.28}$$

dok prostornu derivaciju aproksimiramo s

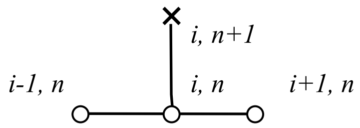
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=i\Delta x} \cong \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \ . \tag{2.29}$$

Uvrštavanjem izraza (2.28) i (2.29) u diferencijalnu jednadžbu (2.27a) dobijemo

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} k\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) \tag{2.30}$$

Uvođenjem oznake $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot k$, dobijemo **eksplicitnu numeričku shemu** oblika

$$\boxed{u_i^{n+1} = \lambda \cdot u_{i+1}^n + (1-2\lambda) \cdot u_i^n + \lambda \cdot u_{i-1}^n} \ . \tag{2.31}$$



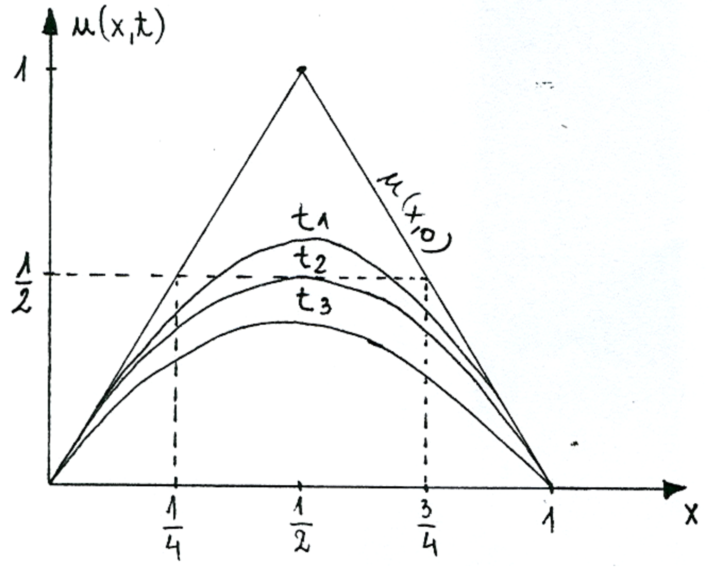
Slika 2.14.

Opazimo da se kod dobivene sheme vrijednosti u nekom vremenskom trenutku određuju na osnovu vrijednosti dobivenih u prethodnom vremenskom koraku (Slika 2.14). Prednost ovakve sheme je to što je vrlo jednostavna za računanje, međutim shema je **stabilna** samo za $\boxed{\lambda \leq \frac{1}{2}}$. Intuitivno, to znači da se ne smijemo pomicati prebrzo u vremenu t, jer možemo dobiti pogrešna rješenja.

Primjer 2.5. $\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad$ za $0 \leq x \leq 1$

početni uvjet : $\quad u(x,0) = \begin{cases} 2x & \text{za } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & za\ \frac{1}{2} \leq x \leq 0 \end{cases}$

rubni uvjet : $\quad \begin{cases} u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$



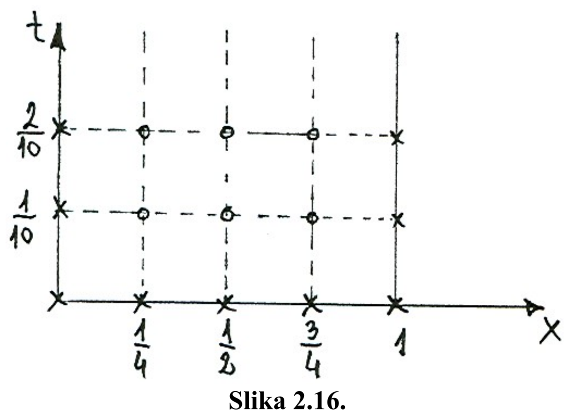
Slika 2.15. Analitičko rješenje

Analitičko rješenje ovog problema može se odrediti Fourierovom metodom. Rješenje se može zapisati u obliku beskonačnog reda. Kao aproksimativno rješenje potom možemo uzeti samo prvih nekoliko članova reda

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\cdot e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \\
&\cong \frac{8}{\pi}\left(e^{-\pi^2 t}\sin\pi x - \frac{1}{9}e^{-9\pi^2 t}\sin 3\pi x\right)
\end{aligned}
$$

Uočimo da se koeficijenti reda smanjuju u zavisnosti o vremenu, što znači da dolazi do disipacije rješenja, te da se glatkoća rješenja s vremenom povećava.

Numeričko rješenje možemo odrediti korištenjem eksplicitne sheme. Rješenje 'gradimo' rekurzivno. Odabrana diskretizacija prikazana je na Slici 2.16.



Slika 2.16.

Rješenja dobivena u određenim točkama prikazana su u tablici.

x / t	rubni uvjet 0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	rubni uvjet 1
početni uvjet 0	u = 0	$u=\frac{1}{2}$	u = 1	$u=\frac{1}{2}$	u = 0
$\frac{1}{10}$	u = 0	$u=\frac{1}{2}$	$u=-\frac{6}{10}$	$u=\frac{1}{2}$	u = 0
$\frac{2}{10}$	u = 0	$u=\frac{1}{2}$	$u=\frac{1}{2}$	$u=\frac{1}{2}$	u = 0
$\frac{3}{10}$	. . .				

Ako odaberemo npr. $\Delta x=\frac{1}{4}$ i $\Delta t=\frac{1}{10}$ slijedi: $\lambda=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{16}}=\frac{16}{10}>\frac{1}{2}$.

Odredimo vrijednosti u točkama mreže za tako definirane parametre.

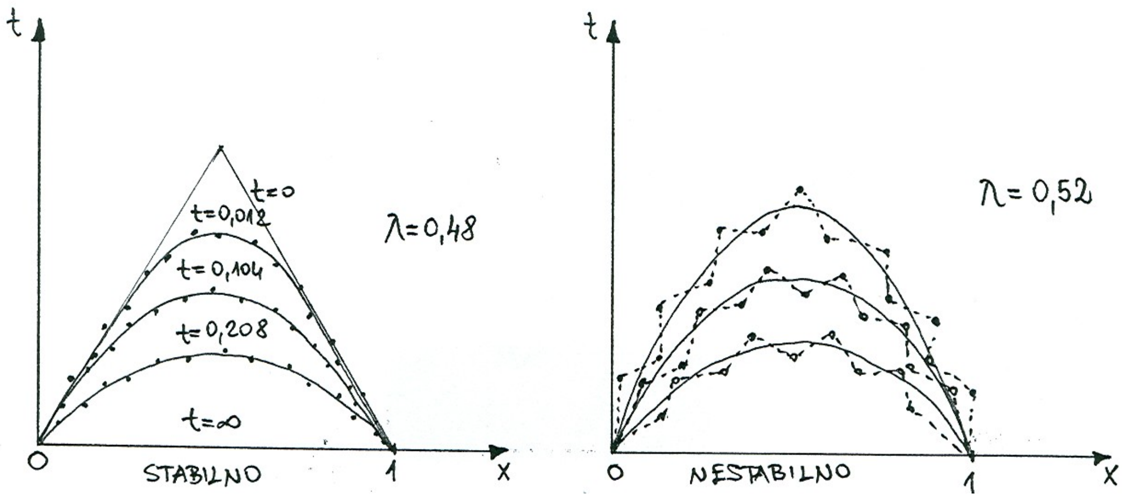
$$u_1^1=\lambda u_2^0+(1-2\lambda)u_1^0+\lambda u_0^0=\lambda\cdot 1+(1-2\lambda)\frac{1}{2}+\lambda\cdot 0=\frac{1}{2}$$

$$u_2^1=\lambda u_3^0+(1-2\lambda)u_2^0+\lambda u_1^0=\lambda\cdot\frac{1}{2}+(1-2\lambda)\cdot 1+\lambda\cdot\frac{1}{2}=-\frac{6}{10}$$ pojava nestabilnosti

$$u_3^1=\lambda u_4^0+(1-2\lambda)u_3^0+\lambda u_2^0=\lambda\cdot 0+(1-2\lambda)\cdot\frac{1}{2}+\lambda\cdot 1=\frac{1}{2}$$

. . . .

Možemo uočiti pojavu nestabilnosti (pojavljuju se oscilacije), jer je numerička shema primijenjena za $\lambda>1/2$. U tablici prikazani rezultati za slučaj kada je $\lambda\le 1/2$ su dobri (Slika 2.17). Prema tome, možemo zaključiti da je **shema stabilna za λ≤1/2.** Možemo zaključiti da je za odabrani prostorni korak, potrebno odabrati takav vremenski korak Δt kod kojega će biti zadovoljen uvjet stabilnosti.



Slika 2. 17.

Komentar

Odaberimo $\Delta x = 0.01$.

$$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{\Delta t}{(0.1)^2} = 100\Delta t$$

$$\Delta t = 0.01 \cdot \lambda = 0.01 \cdot 0.48 = 0.0048$$

Ako je Δx=0.01 tada Δt mora biti 0.0048 (za λ=0.48) ili najviše 0.005 da bi shema bila stabilna. Znači da ćemo u tom slučaju morati veoma smanjiti vremenski korak, pa će se trajanje proračuna veoma povećati. Odgovarajući 'lijek' je korištenje implicitne numeričke sheme.

b) Implicitna shema

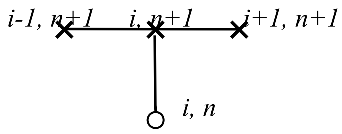
Implicitna se shema razlikuje od eksplicitne samo u načinu aproksimacije prostorne derivacije. Umjesto izraza (2.29), koristimo aproksimaciju

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=i\Delta x} \cong \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad . \tag{2.32}$$

Uvrštavanjem izraza (2.28) i (2.32) u diferencijalnu jednadžbu dobijemo **implicitnu numeričku shemu**

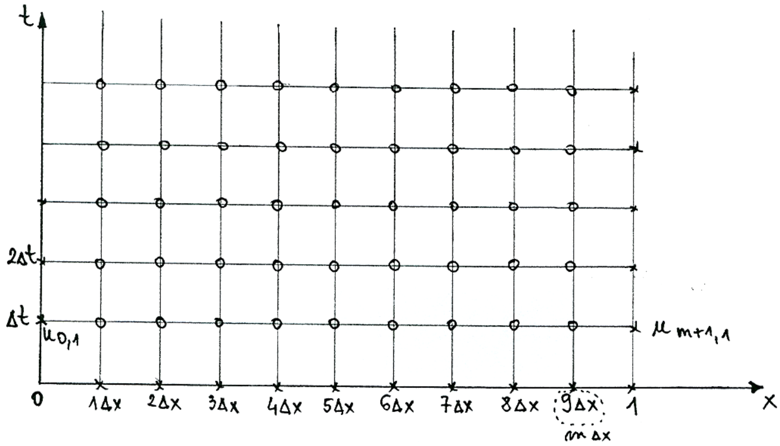
$$\boxed{-\lambda \cdot u_{i-1}^{n+1} + (1+2\lambda) \cdot u_{i+1}^{n+1} - \lambda \cdot u_i^{n+1} = u_i^n} \, . \tag{2.33}$$

Uočimo da nam se na lijevoj strani jednadžbe (2.33) pojavljuju nepoznanice. Dakle, na svakom koraku zapravo dobijemo sustav linearnih jednadžbi za nepoznate vrijednosti $u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \ldots, u_m^{n+1}$. Uzorak točaka koji je korišten kod aproksimacije vrijednosti u_i^{n+1} prikazan je na slici.



Slika 2.18 .

Ono što je veoma značajno je da je matrica koja pripada dobivenom sustavu dijagonalno dominantna za svaki λ, iz čega slijedi da rješenja sustava možemo odrediti za svaki λ. Nije teško uočiti da je matrica trodijagonalna. Dakle, **implicitna metoda je stabilna za svaki λ.**



Slika 2.19.

$\Delta x = 0.1$

Za t = 0 (početni trenutak) poznata je vrijednost funkcije u(x,0):

$$u(0 \cdot \Delta x, 0 \cdot \Delta t) = u_0^0$$
$$u(1 \cdot \Delta x, 0 \cdot \Delta t) = u_1^0$$
$$u(2 \cdot \Delta x, 0 \cdot \Delta t) = u_2^0$$
…………………
$$u(9 \cdot \Delta x, 0 \cdot \Delta t) = u_9^0$$
$$u(10 \cdot \Delta x, 0 \cdot \Delta t) = u_{10}^0$$

Za $\mathbf{t = 1 \cdot \Delta t}$

Za točku $(1 \cdot \Delta x, 1 \cdot \Delta t); i = 1$:

$$-\lambda \cdot u_0^1 + (1 + 2\lambda) \cdot u_1^1 - \lambda \cdot u_2^1 = u_1^0 \Rightarrow (1 + 2\lambda) \cdot u_1^1 - \lambda \cdot u_2^1 = u_1^0 + \lambda \cdot g_0(\Delta t)$$

Za točku $(2 \cdot \Delta x, 1 \cdot \Delta t); i = 2$:

$$-\lambda \cdot u_1^1 + (1 + 2\lambda) \cdot u_2^1 - \lambda \cdot u_3^1 = u_2^0$$

Za točku $(3 \cdot \Delta x, 1 \cdot \Delta t); i = 3$:

$$-\lambda \cdot u_2^1 + (11 + 2\lambda) \cdot u_3^1 - \lambda \cdot u_4^1 = u_3^0$$

. . . .

Za točku $(m \cdot \Delta x, 1 \cdot \Delta t); i = m$:

$$-\lambda \cdot u_{m-1}^1 + (1 + 2\lambda) \cdot u_m^1 - \lambda \cdot u_{m+1}^1 = u_m^0$$

Ukupni sustav:

$$(1 + 2\lambda) \cdot u_1^1 - u_2^1 = u_1^0 + \lambda \cdot g_0(\Delta t)$$
$$-\lambda \cdot u_1^1 + (1 + 2\lambda) \cdot u_2^1 - \lambda \cdot u_3^1 = u_2^0$$
………………………………………
$$-\lambda \cdot u_{m-1}^1 + (1 + 2\lambda) \cdot u_m^1 = u_m^0 + \lambda \cdot g_1(\Delta t)$$

Matrični zapis numeričke sheme u *n*-tom koraku:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}^{n+1}=\mathbf{u}^{n}+\lambda\mathbf{b}^{n}}$$

pri čemu je

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & & \cdots & & & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & & & & \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & -\lambda & 0 \\ & & & 0 & -\lambda & & (1+2\lambda) & -\lambda \\ 0 & & \cdots & & 0 & & -\lambda & (1+2\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}^{n}=\begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{m-2}^n \\ u_{m-1}^n \\ u_m^n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b}^{n}=\begin{pmatrix} g_0(n\Delta t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g_1(n\Delta t) \end{pmatrix}.$$

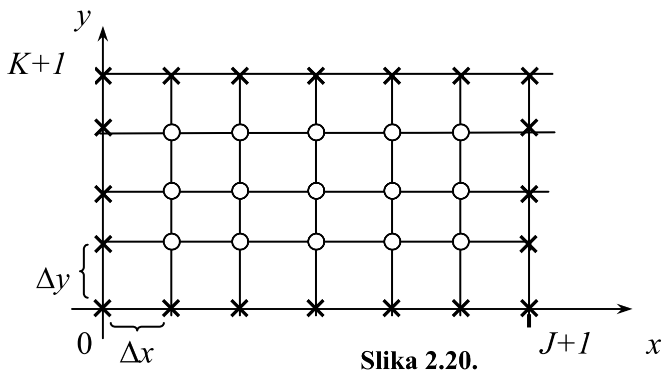
A je trodijagonalna matrica što omogućuje "jeftin" postupak rješavanja.

Provođenje topline u 2d

Promatrajmo pravokutnu ravnu ploču. S $u(x, y, t)$ označimo temperaturu na ploči u točki (x, y) u proizvoljnom trenutku *t*. Diferencijalna jednadžba koja vrijedi za funkciju $u = u(x, y, t)$ glasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{2.34}$$

Da bi našli numeričko rješenje ove diferencijalne jednadžbe, potrebno je najprije diskretizirati numeričku domenu. Pretpostavimo da je odabrani vremenski korak jednak Δt, a da su prostorni koraci jednaki Δx odnosno Δy.



Slika 2.20.

Aproksimacijom parcijalnih derivacija pomoću metode konačnih razlika u jednadžbi (2.34), dobiti ćemo odgovarajuću numeričku shemu.

Međutim, pojavljuju se sljedeći problemi. Kao i kod jednadžbe provođenja u jednodimenzionalnom slučaju, **eksplicitna** numerička shema je nestabilna.

S druge strane, **implicitna** numerička shema svoditi će se na rješavanje sustava s $J \cdot K$ linearnih jednadžbi (gdje je J+1 broj točaka u smjeru osi *x,* a K+1 broj točaka mreže u smjeru osi y – Slika 2.20). Za veće domene, odnosno manje prostorne korake, dimenzije dobivenih sustava će biti ogromne, odnosno određivanje rješenja veoma zahtjevno.

Stoga, se najčešće koristi tzv. **ADI shema (*alternating direction implicit scheme*)**

ADI shema rješava 2d paraboličku jednadžbu pomoću trodijagonalnog sustava. Ideja je da se u svakom vremenski intervalu Δt provedu dva koraka metode.

1.korak: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ se aproksimira s eksplicitnom, a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ s implicitnom shemom

2. korak: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ se aproksimira s implicitnom, a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ s eksplicitnom shemom

Označimo s $u_{ij}^n = u(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, n \cdot \Delta t)$ vrijednost traženog rješenja u točki mreže u trenutku $t = n\Delta t$. Vrijednost u trenutku $(n + \frac{1}{2})\Delta t$ označimo s $u_{ij}^{n+1/2}$.

1 korak:

$$\frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^n}{\Delta t / 2} = k\left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1/2} - 2u_{ij}^{n+1/2} + u_{i,j-1}^{n+1/2}}{(\Delta y)^2}\right) \tag{2.35a}$$

2 korak:

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t / 2} = k\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1/2} - 2u_{ij}^{n+1/2} + u_{i,j-1}^{n+1/2}}{(\Delta y)^2}\right) \tag{2.35b}$$

Kada jednadžbe (2.35a) i (2.35b) zapišemo za sve unutarnje točke numeričke domene dobijemo dva sustava jednadžbi. Opazimo da su u jednadžbama (2.35a) nepozanice sustava vrijednosti $u_{i,j+1}^{n+1/2}, u_{ij}^{n+1/2}, u_{i,j-1}^{n+1/2}$, a u jednadžbama (2.35b) vrijednosti $u_{i+1,j}^{n+1}, u_{ij}^{n+1}, u_{i-1,j}^{n+1}$. Zapravo u svakom od koraka dobijemo sustav od *JK* jednadžbi. Uočiti treba da su oba sustava trodijagonalna, što znači da određivanje rješenja neće biti previše zahtjevno.

Pretpostavimo da je $\Delta x = \Delta y$ i označimo $\lambda = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = k\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$. Jednadžbe (2.35a) i (2.35b) možemo potom pisati u obliku

1. korak:

$$\lambda u_{i,j-1}^{n+1/2} + 2(1+\lambda)u_{ij}^{n+1/2} - \lambda u_{i,j+1}^{n+1/2} = \lambda u_{i-1,j}^n + 2(1-\lambda)u_{ij}^n + \lambda u_{i+1,j}^n \tag{2.36a}$$

2. korak:

$$\lambda u_{i-1,j}^{n+1} + 2(1+\lambda)u_{ij}^{n+1} - \lambda u_{i+1,j}^{n+1} = \lambda u_{i,j-1}^{n+1/2} + 2(1-\lambda)u_{ij}^{n+1/2} + \lambda u_{i,j+1}^{n+1/2} \tag{2.36b}$$

Gornje jednadžbe treba dakle raspisati za sve unutarnje točke domene, a na rubovima treba uvažiti rubne uvjete.

HIPERBOLIČKE PDJ

Hiperboličke parcijalne diferencijalne jednadžbe koje se kod modeliranja fizikalnih pojava najčešće pojavljuju su zapravo zakoni očuvanja. Općenito se zakon očuvanja može zapisati u obliku

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 .$$

PRIMJER:

1. Neka je $\rho = \rho(x,t)$ gustoća fluida. Jednadžba očuvanja mase glasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 ,$$

pri čemu je $v = v(x,t)$ brzina gibanja fluida. To je npr. jednadžba kojom se može

VALNA JEDNAŽBA PRVOG REDA

Promatrajmo najprije početni problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{, za } t > 0 \text{ i } -\infty < x < \infty$$

sa zadanim početnim uvjetom $u(x,0) = u_0(x)$.

Tražimo rješenja dane jednadžbe.