

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAŽBE DRUGOG REDA - LINEARNE (PDJ)

Za danu funkciju $u = u(x, y)$ se parcijalne derivacije definiraju s

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \quad (2.1.a)$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \quad (2.1.b)$$

Parcijalna diferencijalna jednažba je jednažba koja sadrži parcijalne derivacije nepoznate funkcije dviju ili više nezavisnih varijabli.

Primjer 2.1.

Primjeri PDJ: a) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, y)$

Općeniti oblik linearne PDJ drugog reda s konstantnim koeficijentima je

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0. \quad (2.2)$$

Tip jednažbe (2.2) određen je s predznakom izraza $B^2 - 4AC$. Jednažba (2.2) je

- a) **eliptička** za $B^2 - 4AC < 0$;
- b) **parabolička** za $B^2 - 4AC = 0$;
- c) **hiperbolička** za $B^2 - 4AC > 0$.

Zbog veoma raširene pojave jednažbi ovakvog tipa u matematičkom modeliranju fizikalnih pojava, a time i u inženjerstvu, upoznat ćemo neke od numeričkih metoda koje se koriste pri rješavanju jednažbi oblika (2.2). Numeričke se metode bitno razlikuju u zavisnosti o tipu jednažbe.

ELIPTIČKE PDJ

Tipični predstavnici PDJ eliptičkog tipa su

Laplaceova PDJ

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

Poissonova PDJ

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2.4)$$

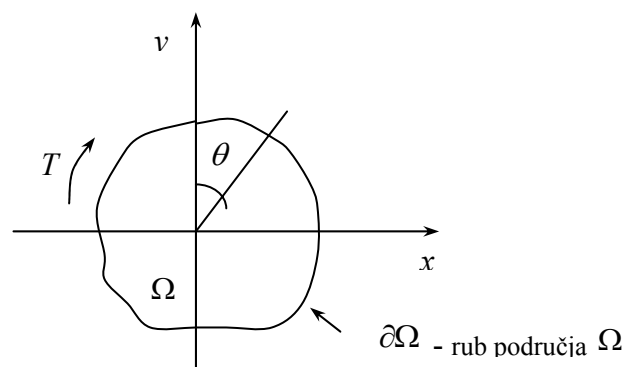
Kvaziharmonička PDJ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad (2.5)$$

Ovdje je $u = u(x, y)$ nepoznata funkcija, $f = f(x, y)$ vanjska sila, dok su k_x i k_y koeficijenti koji definiraju medij.

PROBLEMI KOJI VODE NA PDJ ELIPTIČKOG TIPA

1. TORZIJA GREDE



Slika 2.1.

Promatramo gredu čiji je poprečni presjek jednak Ω . Pretpostavimo da djelovanje vanjske sile na jednom kraju grede prouzroči torziju. Moment sile T koji djeluje je jednak

$$T = 2G\theta \int_{\Omega} \psi(x, y) dx dy. \quad (2.6)$$

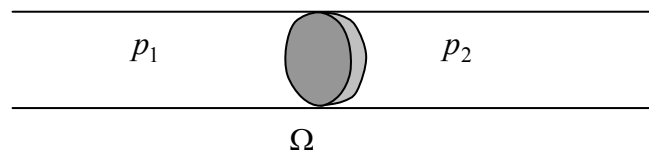
Ovdje je G modul krutosti, a θ kut zaokreta.

Funkcija $\psi = \psi(x, y)$ je funkcija koja zadovoljava Poissonovu jednadžbu

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2 \quad (2.7)$$

unutar područja Ω , dok je $\psi = 0$ na rubu presjeka Ω ($\psi|_{\partial\Omega} = 0$).

2. POLOŽAJ MEMBRANE



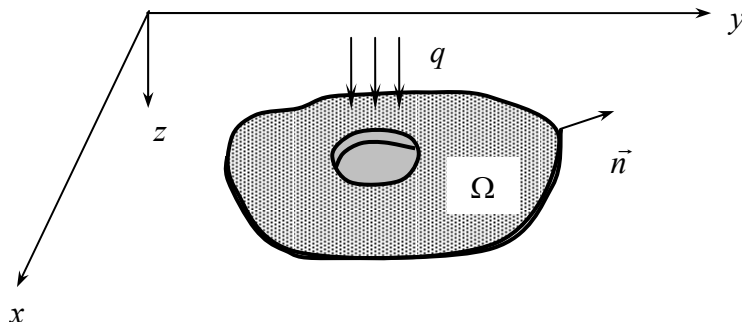
Slika 2.2.

Označimo s $u = u(x, y)$ odmak membrane iz ravnotežnog položaja u točki (x, y) . Jednadžba koju ta funkcija zadovoljava je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{p_1 - p_2}{\sigma}. \quad (2.8)$$

Jednadžba (2.8) vrijedi za točke unutar područja Ω , dok vrijednosti za $u = u(x, y)$ na rubu područja Ω ($u|_{\partial\Omega}$) moraju biti zadane. Ovdje su p_1 i p_2 vrijednosti tlaka na različitim stranama membrane, dok je σ njezina površinska napetost.

3. PODUPRTA PLOČA



Slika 2.3.

Promatramo ploču jednostavno poduprtu na rubovima, s površinskim opterećenjem q (Slika 2.3). Progib tako slobodno oslonjene ploče u smjeru z može se odrediti iz PDJ eliptičkog tipa

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2.9)$$

koja vrijedi u unutarnjim točkama područja Ω , te rubnih uvjeta

$$z|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{i} \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial n^2} \right|_{\partial\Omega} = 0 . \quad (2.10)$$

Parametar D definiran je s

$$D = \frac{Et^3}{2(1-\sigma^2)},$$

gdje je E Youngov modul elastičnosti, t debljina ploče, a σ Poissonov koeficijent. Ako definiramo novu varijablu

$$u = \Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad (2.11a)$$

jednadžba (2.9) može se zapisati u obliku

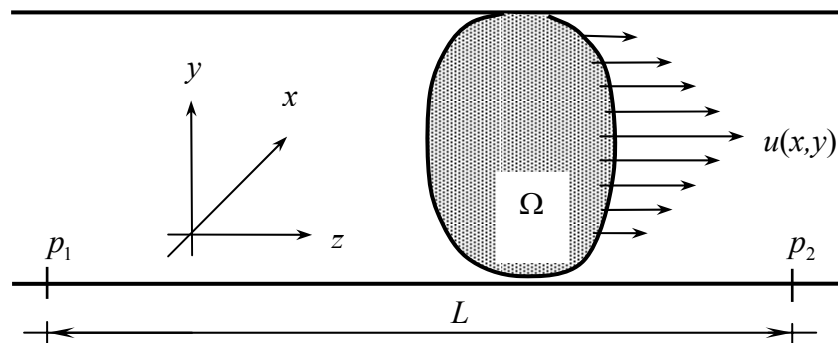
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{q}{D}, \quad (2.11b)$$

pa se problem (2.9) svodi na rješavanje dviju Poissonovih jednadžbi (2.11a) i (2.11b). Iz rubnih uvjeta (2.10) odredimo rubne uvjete koji pripadaju dobivenim jednadžbama tj.

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{i} \quad z|_{\partial\Omega} = 0 . \quad (2.12)$$

Naravno, najprije se rješava jednadžba (2.11b), a onda se dobiveno rješenje iskoristi za rješavanje jednadžbe (2.11a).

4. VISKOZNO STRUJANJE FLUIDA U CIJEVI



Slika 2.4.

Promatramo strujanje fluida u cijevi duljine L , pri čemu je na jednoj strani cijevi tlak p_1 a na drugoj p_2 . Ako s $u(x, y)$ označimo brzinu čestice fluida, pokazuje se da vrijedi jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu} \frac{p_1 - p_2}{L}, \quad (2.13)$$

dok je na rubu $u = 0$. Ovdje je ν dinamički koeficijent viskoznosti.

Protok fluida izračunamo iz

$$Q = \int_{\Omega} u(x, y) \cdot dx dy.$$

5. NEVRTLOŽNO STRUJANJE IDEALNOG ($\nu = 0$) I NESTLAČIVOG FLUIDA

Kod nevertložnog strujanja idealnog ($\nu = 0$) i nestlačivog fluida vrijedi:

$rot \vec{v} = 0$ - uvjet nevertložnosti

$div \vec{v} = 0$ - uvjet nestlačivosti.

Iz uvjeta nestlačivosti potom slijedi:

$$\Delta \varphi = 0, \quad (2.14)$$

gdje je φ potencijal brzine, tj.

$$\vec{v} = grad \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}.$$

Kod strujanja oko prepreke koja je opisana s područjem Ω , vrijedi da je brzina tangencijalna na rub područja Ω , tj. $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, gdje je \vec{n} normala na rub.

To znači da je rubni uvjet u tom slučaju dan s

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} = 0. \quad (2.15)$$

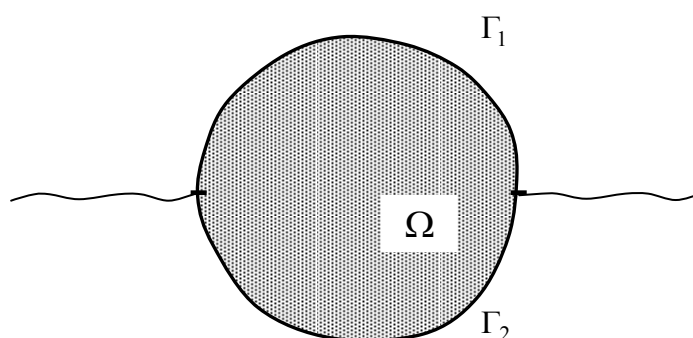
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{2D model}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{3D model}$$

Primjeri: strujanje oko rotora, strujanje vode oko stupa, interakcija vode ili zraka sa konstrukcijom, ...

6. STACIONARNO PROVOĐENJE TOPLINE

Primjer: greda sa jedne strane u vodi ili zemlji



Slika 2.5.

Promatramo stacionarnu razdiobu topline ravne ploče na području Ω . Ako je $T(x, y)$ temperatura u proizvoljnoj točki $(x, y) \in \Omega$, funkcija $T = T(x, y)$ zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ na } \Omega. \quad (2.16)$$

Pretpostavimo da je dijelu ruba Γ_1 temperatura konstantna i jednaka T_0 . U tom je slučaju rubni uvjet jednak

$$T|_{\Gamma_1} = T_0. \quad (2.17)$$

Takav se rubni uvjet naziva **Dirichletov** (glavni, kinematički) rubni uvjet.

Na području Γ_2 može biti zadan *toplinski protok* (fluks) q kroz rub domene. Vrijedi relacija $q = -k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}$. Na taj način dobijemo rubni uvjet oblika

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma_2} = -\frac{q}{k}. \quad (2.18)$$

Rubni uvjet ovakvog oblika naziva se **von Nuemannov** (*prirodni, dinamički*) rubni uvjet. U slučaju toplinske izoliranosti na rubu Γ_2 taj će rubni uvjet glasiti

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0.$$

U slučaju kada unutar dvodimenzionalne domene Ω postoje izvori i ponori, umjesto (2.16) vrijedi Poissonova jednačba

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (2.19)$$

gdje je $f(x, y)$ funkcija pomoću koje su ti izvori i ponori topline opisani.

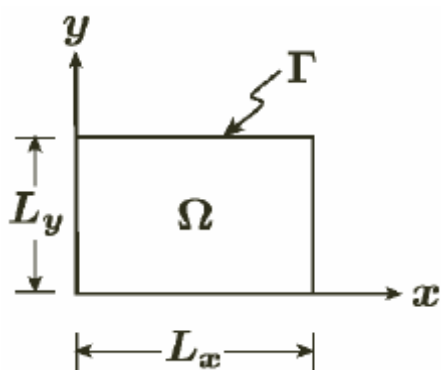
Ostali problemi koji vode na PDJ:

- difuzija
- strujanje u poroznoj sredini
- elektro i magnetostatika

MATEMATIČKI MODEL

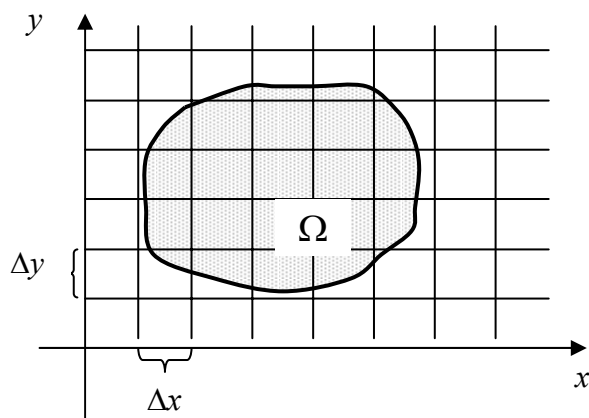
U prethodnim smo slučajevima mogli opaziti da matematički oblik postavljenih problema općenito glasi

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{za } \forall (x, y) \in \Omega \\ u|_{\Gamma_1} &\text{ zadano} \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} &\text{ zadano} \end{aligned} \quad (2.20)$$



NUMERIČKO RJEŠAVANJE

Metoda konačnih razlika



Slika 2.6.

Tražimo rješenje Laplaceove PDJ

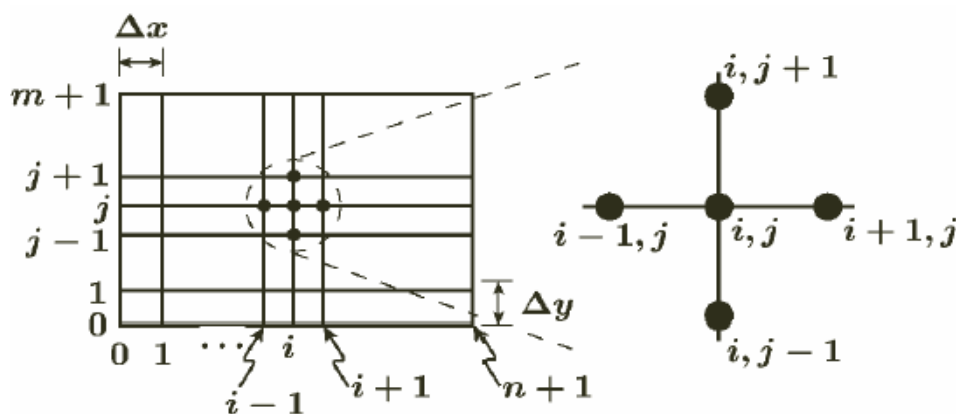
$$\Delta u = 0 \quad (2.21)$$

na području Ω .

Slično kao i kod običnih diferencijalnih jednačbi, prvi je korak diskretizacija numeričke domene. Definiamo numeričku mrežu s intervalima širine Δx u smjeru osi x , te širine Δy u smjeru osi y . Uvedimo oznaku

$$u_{ij} = u(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y). \quad (2.22)$$

Numerički odrediti rješenje jednačbe (2.21), znači odrediti vrijednosti u_{ij} koje zadovoljavaju (2.21) unutar područja Ω .



Slika 2.7.

Aproksimacije parcijalnih derivacija pomoću metode konačnih razlika su za ovako definirane oznake jednake

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y)} &\cong \frac{u((i+1) \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y) - 2u(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y) + u((i-1) \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y)}{(\Delta x)^2} = \\ &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (2.23a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y)} \cong \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}. \quad (2.23b)$$

Za $\Delta x = \Delta y = h$ aproksimacija jednačbe (2.21) u točki $(i \Delta x, j \Delta y)$ je

$$\Delta u \Big|_{(i \Delta x, j \Delta y)} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(i \Delta x, j \Delta y)} \cong \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) = 0.$$

Znači, za svaku točku numeričke mreže unutar područja Ω , vrijedi jednačba

$$\boxed{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0} \quad (2.24)$$

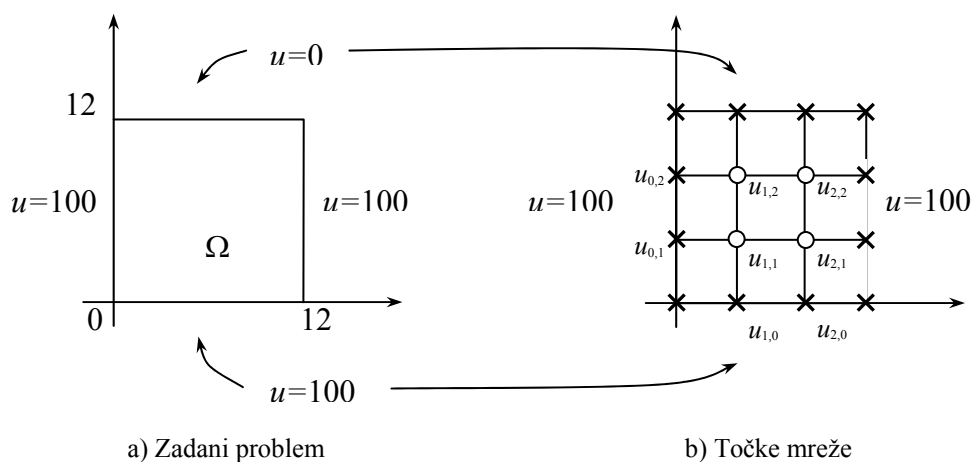
Za svaki (i, j) , jednačba povezuje vrijednosti rješenja u susjednim točkama mreže, točnije, u točkama uzorka koji je prikazan na Slici 2.7.

Ukoliko se u jednađbi (2.24) za neki (i,j) pojavljuju točke koje se nalaze na rubu područja, njihove ćemo vrijednosti odrediti iz rubnih uvjeta.

Za $m \times n$ unutarnjih točaka mreže dobijemo sustav $m \cdot n$ linearnih jednađbi. Uočimo da sustav može biti veoma velik, ali je matrica koeficijenata prilično rijetka, što se pri rješavanju sustava može iskoristiti, te sustav rješavati koristeći iterativne metode.

Primjer 2.2.

Odrediti stacionarnu raspodjelu temperature na kvadratnoj ploči stranice duljine 12 cm, izrađenoj od homogenog materijala, pri čemu se rubovi drže na temperaturi od 0°C i 100°C (kao što je prikazano na Slici 2.8).



Slika 2.8.

Za numeraciju točaka mreže kao što je prikazano na Slici 2.8b., te na osnovu zadanih rubnih uvjeta, pripadajući sustav koji proizlazi iz Laplaceove jednađbe, a definiran je jednađbama (2.24) jednak je

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= -200 \\ u_{11} - 4u_{21} + u_{22} &= -200 \\ u_{11} - 4u_{12} + u_{22} &= -100 \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -100 \end{aligned}$$

Sustav možemo riješiti Gaussovom eliminacijom ili iterativno. Rješenje ovog sustava glasi:

$$u_{11} = u_{21} = 87.5 \quad \text{i} \quad u_{12} = u_{22} = 62.5.$$

Točno rješenje zadanog problema glasi

$$u_{11} = u_{21} = 88.1 \quad \text{i} \quad u_{12} = u_{22} = 61.9.$$

S obzirom da smo koristili prilično široku mrežu, dobiveno aproksimativno rješenje je prilično dobro.

Ukoliko na nakom području rješavamo Poissonovu jednadžbu

$$\Delta u = f(x, y) , \quad (2.25)$$

uvrštavanjem konačnih razlika, dobijemo jednadžbe oblika

$$\boxed{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = f_{ij}h^2} , \quad (2.26)$$

gdje je $f_{ij} = f(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y)$.

Uočimo, da je dobiveni sustav jednadžbi oblika

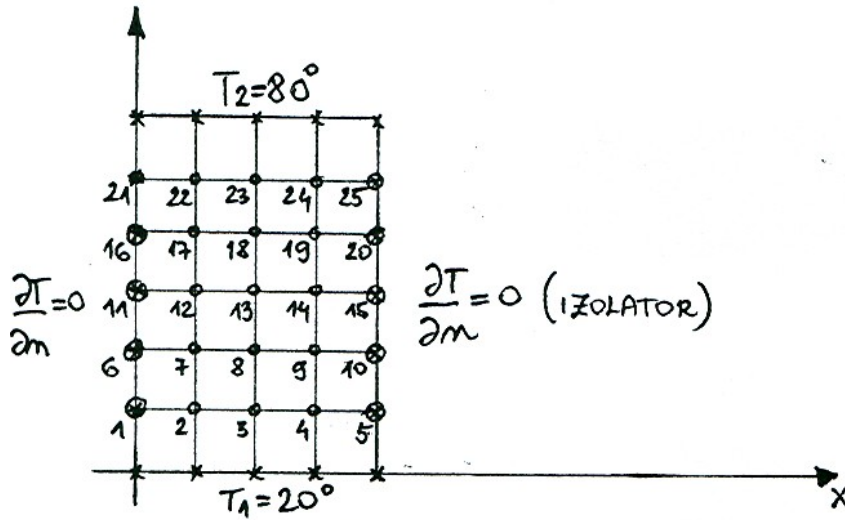
$$\boxed{\mathbf{A}\hat{u} = \hat{f}} ,$$

gdje je

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & -1 & 4 & & & -1 \\ \hline -1 & & & 4 & -1 & -1 \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & -1 & & -1 & 4 \\ \hline & & & -1 & & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & 4 \end{array} \right) , \quad \hat{u} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{n1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{nm} \end{pmatrix}$$

Primjer 2.3. Numeričko tretiranje Neumannovog (dinamičkog) rubnog uvjeta

Odrediti temperaturu pravokutne ploče, za rubne uvjete zadane na Slici 2.9.



Slika 2.9.

U svakoj točki mreže zapišemo jednadžbu koja proizlazi iz Laplaceove jednadžbe ili rubnih uvjeta.

- u točki 1. $T_1 = T_2 \Rightarrow T_1 - T_2 = 0$
- u točki 2. $T_2 = \frac{T_3 + T_1 + T_7 + 20^\circ}{4} \Rightarrow$
 $T_1 - 4T_2 + T_3 + T_7 = -20^\circ$
- u točki 3. $-T_2 + 4T_3 - T_4 - T_8 = 20^\circ$
- u točki 4. $-T_3 + 4T_4 - T_5 - T_9 = 20^\circ$
- u točki 5. $T_4 - T_5 = 0$
- u točki 6. $T_6 - T_7 = 0$
- u točki 7. $-T_6 + 4T_7 - T_8 - T_{12} - T_2 = 0$
- u točki 8. $-T_7 + 4T_8 - T_9 - T_{13} - T_3 = 0$

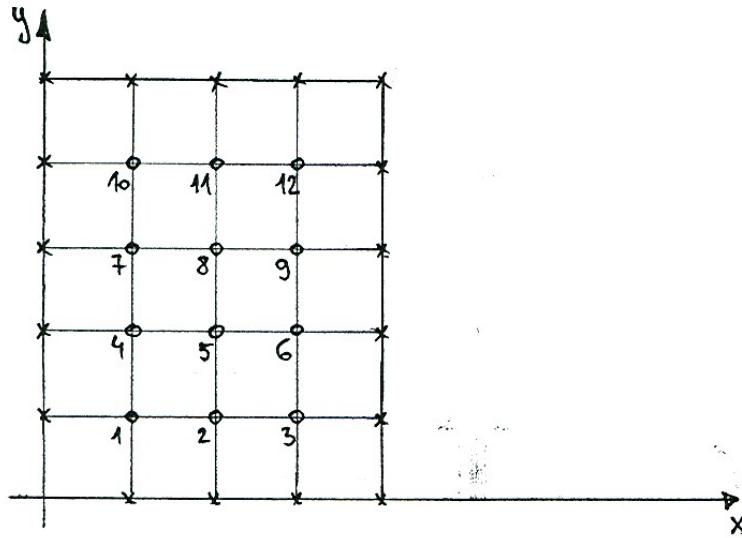
.....
 Dobivamo linearni algebarski sustav od 25 nepoznanica (T_1, T_2, \dots, T_{25})

Matrični zapis:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ \dots \\ T_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Primjer 2.4. - Torzija grede

Odrediti kut zaokreta poprečnog profila grede pravokutnog poprečnog presjeka koji je prikazan na Slici 2.10.



Slika 2.10.

Matematički model:

$$\Delta \psi = -2 \quad \text{u } \Omega$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0$$

Numerički model:

$$4\psi_{i,j} - \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} - \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} = 2h^2$$

Za numeraciju točaka mreže kao što je to prikazano na Slici 2.10. dobijemo sustav jednažbi

točka 1. $4\psi_1 - \psi_2 - \psi_4 - 0 - 0 = 2h^2$

točka 2. $4\psi_2 - \psi_1 - \psi_3 - \psi_5 - 0 = 2h^2$

točka 3. $4\psi_3 - \psi_6 - \psi_2 - 0 - 0 = 2h^2$

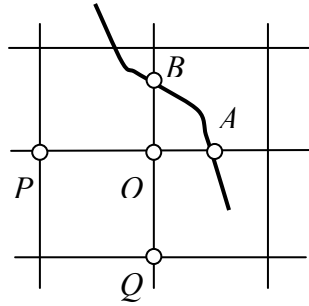
točka 4. $4\psi_4 - \psi_5 - \psi_7 - \psi_1 - 0 = 2h^2$

točka 5. $4\psi_5 - \psi_6 - \psi_8 - \psi_4 - \psi_2 = 2h^2$

.....
itd.

Kut zaokreta: $\theta = \frac{T}{2G \int_A \psi(x, y) dx dy}$

Numeričko tretiranje nepravilnog ruba domene



Slika 2.11.

Pretpostavimo da su A i B točke koje se nalaze na rubu domene, te da su nam poznate vrijednosti u_A i u_B . Osim toga, pretpostavimo da A i B nisu točke odabrane numeričke mreže. Pretpostavimo da je $\Delta x = \Delta y = h$, te da je udaljenost točaka A i B od točke O jednaka ah i bh , $0 < a, b < 1$, respektivno.

Tražimo aproksimaciju Laplaceove jednadžbe u točki O . Jasno je da jednadžbu (2.24) nećemo moći primijeniti, jer neke od točaka koje se pojavljuju u toj jednadžbi ne leže niti unutar niti na rubu promatranog područja. Pokušajmo umjesto toga iskoristiti poznate vrijednosti u_A i u_B .

$$u_A = u_0 + ah \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_O + \frac{1}{2} (ah)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_O + \dots$$

Iz razvoja funkcije u u Taylorov red slijedi

$$u_P = u_0 - h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_O + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_O + \dots$$

odnosno $u_A + au_P \cong (1+a)u_0 + \frac{1}{2} a(1+a)h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_O$ iz čega slijedi aproksimacija

druge parcijalne derivacije po x u točki O

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_O \cong \frac{2}{h^2} \left[\frac{1}{a(1+a)} u_A + \frac{1}{1+a} u_P - \frac{1}{a} u_0 \right].$$

Na sličan se način dobije i aproksimacija

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_O \cong \frac{2}{h^2} \left[\frac{1}{b(1+b)} u_B + \frac{1}{1+b} u_Q - \frac{1}{b} u_0 \right].$$

Uvrštavanjem dobivenih aproksimacija slijedi da kod nepravilnog ruba domene, za točke koje se nalaze u blizini ruba (u situaciji kao na Slici 2.11), diskretizacija Laplaceovog operatora ima oblik

$$\Delta u \Big|_O \cong \frac{2}{h^2} \left[\frac{u_A}{a(1+a)} + \frac{u_B}{b(1+b)} + \frac{u_P}{1+a} + \frac{u_Q}{1+b} - \frac{a+b}{ab} u_0 \right].$$

Laplaceov operator u polarnom koordinatnom sustavu

Ukoliko uvedemo polarni koordinatni sustav i promatramo funkciju $u = u(r, \varphi)$, pri čemu vrijedi veza $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, Laplaceov operator glasi

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Laplaceov operator u polarnim koordinatama ćemo koristiti ako je područje Ω unutar kojeg rješavamo Laplaceovu ili Poissonovu jednadžbu lakše opisati pomoću polarnih koordinata (npr. kružno područje, kružni vjenac i sl.). U tom slučaju metodu konačnih razlika možemo primijeniti na derivacije u polarnim koordinatama. Ponovno ćemo dobiti sustav jednadžbi (koji je nešto složeniji nego u pravokutnom koordinatnom sustavu), koji ćemo moći riješiti nekom od numeričkih metoda.

