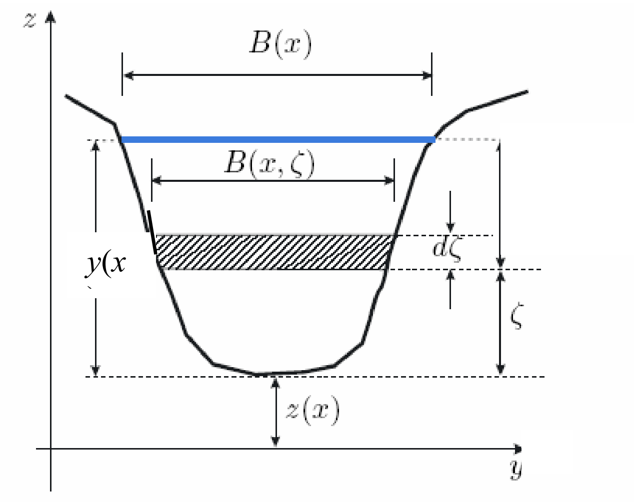
MODELIRANJE OTVORENOG VODOTOKA (OPEN-CHANNEL FLOW)

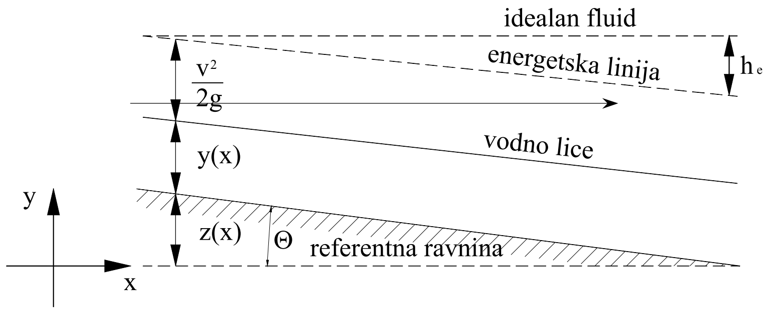
Promatrajmo strujanje fluida u otvorenom vodotoku.
Poprečni presjeci kanala mogu biti različiti npr. pravokutni, trapezni i sl., dok se kod prirodnih vodotoka pojavljuju poprečni presjeci nepravilnih oblika. Ukoliko je poprečni presjek kanala jednak na proizvoljnom presjeku, te je nagib dna jednak u bilo kojoj točki, govorimo o **prizmatičnom** kanalu.



Slika 1. Poprečni presjek kanala na udaljenosti *x*

Na poprečnom presjeku kanala definiramo sljedeće veličine:
A – površina omočenog presjeka kanala ($A = A(x, y)$)
P – perimetar odn. opseg omočenog presjeka ($P = P(x, y)$)
R – hidraulički radijus; $R = \dfrac{A}{P}$

Klasifikacija strujanja se može napraviti prema različitim kriterijima. Ako se brzina strujanja ne mijenja u ovisnosti o vremenu, onda je strujanje **stacionarno**, u suprotnom se radi o **nestacionarnom** strujanju. Nadalje, ako se brzina strujanja ne mijenja s obzirom na udaljenost u kanalu (od neke referentne točke) onda je strujanje **uniformno**, a inače se radi o **neuniformnom** strujanju.



Slika 2.

Pretpostavke:
- kut θ je mali
- strujanje je izrazito jednodimenzionalno
- tlak je isključivo hidrostatski

Općenito se strujanje u kanalu opisuje sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, koje proizlaze iz zakona očuvanja mase i zakona očuvanja količine gibanja. Ako pretpostavimo da se radi o **prizmatičnom** kanalu, možemo ih zapisati u obliku:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \\ &\frac{\partial v}{\partial t}+g\frac{\partial}{\partial x}\left(y+\frac{v^2}{2g}\right)=g(S_0-S_f) \end{aligned}\right\}\text{dinamičke jednadžbe} \qquad (1)$$

y je dubina vode, v brzina, a Q protok, pri čemu vrijedi relacija $v=\frac{Q}{A}$. S_f je pad energetske linije $\frac{dH}{dx}$, definiran Manningovom formulom (koja je prikazana u nastavku). Uvedimo oznaku

$$\frac{dH}{dx}=-S_f\,. \qquad (2)$$

S S_0 smo označili nagib dna kanala, tj. $S_0=-\frac{dz}{dx}=-\tan\Theta$.

Stacionarno strujanje

Nadalje, ukoliko promatramo **stacionarno strujanje** fluida, očito je da zbog neovisnosti varijabli o vremenu tj. $\frac{\partial A}{\partial t}=0$ i $\frac{\partial v}{\partial t}=0$, iz prve jednadžbe sustava (1) slijedi:

$$Q=konst.$$

odnosno iz druge jednadžbe

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dy}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)=S_f\,. \qquad (3)$$

Zapravo se ova jednadžbe može dobiti i ako krenemo od poznate nam Bernoullijeve jednadžbe

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}=H$$

prema kojoj je ukupna energija konstantna duž strujnice. Vrijednost energetske linije označimo s *H*. Uvažavanjem jednakosti $p=\rho g y$, slijedi $z+y+\frac{v^2}{2g}=H$, odnosno deriviranjem po *x* dobijemo diferencijalnu jednadžbu za dubinu vode $y=y(x)$:

$$\boxed{\frac{dz}{dx}+\frac{dy}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2gA^2}\right)=\frac{dH}{dx}}. \tag{4}$$

Nadalje, kod stacionarnog toka $(Q=konst.)$ u **prizmatičnom kanalu** vrijedi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2gA^2}\right)=\frac{Q^2}{2g}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{A^2}\right)=\frac{Q^2}{2g}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{A^2}\right)\frac{dy}{dx}=-\frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy}\frac{dy}{dx}=-\frac{Q^2B}{gA^3}\frac{dy}{dx} \tag{5}$$

Kod druge smo jednakosti uvažili činjenicu da je kanal prizmatičan, što znači da se poprečni profili ne mijenjaju s obzirom na udaljenost *x* u kanalu, dok zadnja jednakost slijedi iz $\frac{dA}{dy}=B$.

Pad energetske linije $\frac{dH}{dx}=-S_f$ definiran je Manningovom formulom, pomoću koje se modeliraju gubici nastali zbog trenja

Manningova formula:

$$\boxed{S_f=\frac{Q^2n^2}{R^{4/3}A^2}}, \tag{6}$$

gdje je n Manningov koeficijent trenja, $R=\frac{A}{P}$ je hidraulički radijus, a P perimetar.

Vrijednosti Manningovog koeficijenta:

- betonski kanal 0,015
- prirodni kanali (glina) 0,030
- riječni tokovi 0,030 – 0,07

Kod **stacionarnog toka**, iz (4)-(6) dobijemo diferencijalnu jednadžbu za dubinu vode $y=y(x)$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{S_0-S_f}{1-\frac{BQ^2}{gA^3}}} \tag{7}$$

Opazimo da jednadžba (7) vrijedi za $\frac{BQ^2}{gA^3}\neq 1$.

(7) je **diferencijalna jednadžba prvog reda** oblika,

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x))}$$

za koju analitičko rješenje znamo odrediti samo u nekim posebnim slučajevima, za razliku od numeričkog rješenja koje znamo odrediti u području u kojem je diferencijalna jednadžba dobro definirana. Da bi problem bio u potpunosti modeliran potrebno je zadati i početne uvjete.

Zadatak:

Za početni uvjet $y(x_0) = y_0$ odrediti dubinu vode $y(x)$ iz diferencijalne jednadžbe (7) .

Poseban slučaj: Uniformni tok i normalna dubina

Kao što smo već spomenuli, kod uniformnog strujanja su brzina i dubina vode konstantne veličine pa iz jednadžbe (7), radi $\frac{dy}{dx} = 0$, slijedi:

$$\boxed{S_0 = S_f\,.}$$

Iz Manningove formule (6) potom proizlazi da kod uniformnog toka vrijedi:

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}\,. \tag{8}$$

Na osnovu te jednadžbe može se odrediti dubina vode kod uniformnog toka, tzv. **normalna dubina** koju ćemo označiti s y_n .

Prizmatični kanal s pravokutnim poprečnim presjekom:

B - širina kanala

$$A(y) = B \cdot y \Rightarrow \frac{dA}{dy} = B \quad ; \qquad P(y) = B + 2y$$

Kod zadavanja podataka, obično su nam poznate veličine: Q, n, S_0, B . Normalnu dubinu potom možemo odrediti iz sljedećeg izraza:

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1}{n} B y_n \left(\frac{B y_n}{B + 2 y_n} \right)^{2/3} S_0^{1/2} \tag{9}$$

koristeći neku od numeričkih metoda.

Trapezni kanal:

B_0 - širina dna kanala

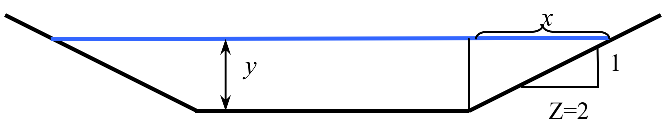
Z - nagib bočnih stranica kanala (tangens kuta nagiba bočnih stranica kanala)

$$A(y) = (B_0 + yZ) \cdot y \Rightarrow \frac{dA}{dy} = B_0 + 2yZ \quad ; \qquad P(y) = B_0 + 2y\sqrt{1 + Z^2}$$

Primjer.

Odrediti normalnu dubinu vode y_n u trapeznom kanalu, s bočnim nagibom $Z = 2$, te širinom dna $B_0 = 10m$. Nagib dna kanala je konstantan i jednak $S_0 = -\frac{dz}{dx} = 0.001$ ($1m$ po km duljine), a Manningov koeficijent $n = 0.013$.

Rješenje.



Dubinu vode označimo s *y*.
Iz sličnosti trokuta slijedi $1 : z = y : x$, pa je $x = zy$.
Površina omočenog presjeka trapeza je $A = (B_0 + zy)y$.
Opseg omočenog presjeka trapeza je $P = B_0 + 2y\sqrt{1 + z^2}$.
Hidraulički radijus je $R = \frac{A}{P} = \frac{(B_0 + zy)y}{B_0 + 2y\sqrt{1 + z^2}}$.
Normalnu dubinu vode potom određujemo iz jednadžbe (8), koja nakon uvrštavanja dobivenih izraza i i sređivanja poprimi oblik

$$\frac{nQ}{S_0} - \frac{\left[(B_0 + zy_n)y_n\right]^{5/3}}{\left[B_0 + 2y_n\sqrt{1 + z^2}\right]^{2/3}} = 0 .$$

Nakon uvrštavanja poznatih vrijednosti dobijemo

$$F(y_n) = 12.33\left(10 + 4.47y_n\right)^{2/3} - \left((10 + 2y_n)y_n\right)^{5/3} = 0 .$$

Nul točka funkcije $F(y)$ predstavlja rješenje gornje jednadžbe. Može se odrediti npr. pomoću neke od numeričkih metoda npr. bisekcijom ili Newtonovom metodom. Rješenje je

$$y_n = 1.09m .$$

$\boxed{\text{Kritična dubina}}$

Nadalje, definirajmo $\boxed{\textbf{kritičnu dubinu}}$ y_c. To je dubina kod koje je **Froudov broj** jednak 1, tj.

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gy_c}} = 1. \tag{10}$$

Opazimo da je u slučaju kritične dubine nazivnik u diferencijalnoj jednadžbi (7) jednak 0 te da diferencijalna jednadžba u toj točki ne vrijedi.
Kritičnu dubinu možemo izraziti iz (10) te dobijemo

$$\boxed{y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gA^2}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}} \tag{11}$$

gdje je $q = \frac{Q}{A}$. Karakteristika kritične dubine je da je to dubina kod koje je specifična energija fluida minimalna.

Vrijednost $c = \sqrt{gy}$ nazivamo **brzina širenja poremećaja**. To je zapravo relativna brzina širenja vala u odnosu na medij unutar kojeg taj val putuje. Apsolutne brzine širenja vala su zapravo jednake *v-c* i *v+c*. Ako je $v < c$ onda govorimo o ***podkritičnom toku,*** za $v = c$ je tok ***kritičan***, dok je za $v > c$ ***tok nadkritičan.***
Uočimo da kod podkritičnog toka vrijedi $v - c < 0$, a $v + c > 0$ što znači da se jedan kraj vala putuje uzvodno, a drugi nizvodno. Kod kritičnog je toka $v - c = 0$, pa je jedna strana vala stacionarna, dok druga putuje nizvodno brzinom $v + c$. Za razliku od toga, kod nadkritičnog toka se obje strane vala gibaju nizvodno, jer je $v - c > 0$ i $v + c > 0$. Dakle, kod nadkritičnog toka poremećaj putuje isključivo nizvodno, što znači da tok uzvodno od promatrane lokacije uopće 'ne zna' što se događa nizvodno.

HIDRAULIČKI SKOK

Hidraulički skok (jump) se pojavljuje kod prijelaza strujanja iz nadkritičnog u pdkritično. U točki u kojoj je Froudov broj jednak 1 dogodi se hidraulički skok. Kod hidrauličkog skoka dolazi do gubitka energije (zbog turbulencije) i do naglog skoka u vodnom licu. Kako gubitak energije na skoku nije unaprijed poznat, jednadžbu očuvanja energije ne možemo primijeniti direktno. Uočimo također da u točki skoka diferencijalna jednadžba (7) ne vrijedi jer je nazivnik desne strane jednak nula.

U nastavku ćemo promatrati rješenja jednadžbe (7) uz postavljeni početni uvjet $y(x_0) = y_0$, tj. poznatu dubinu vode u nekoj točki. Kako analitička rješenja jednadžbe nisu poznata, osim u nekim posebnim slučajevima, za rješavanje ćemo koristiti numeričke metode. Prisjetimo se, da su standardne numeričke metode za rješavanje diferencijalne jednadžbe prvog reda:

Eulerova metoda, poboljšana Eulerova metoda i različite Runge-Kutta metode. Koju ćemo od spomenutih metoda odabrati ovisi o točnosti koju želimo postići. Pritom treba svakako voditi računa i o stabilnosti pojedinih metoda.
Rješenja postavljenog početnog problema mogu biti različitog oblika, u zavisnosti o početnom uvjetu, nagibu kanala i trenju u kanalu. Promatrati ćemo različite slučajeve u tzv. kanalima **s blagim nagibom (mild slope)**. Takav je nagib okarakteriziran uvjetom

$$\boxed{y_c < y_n}$$

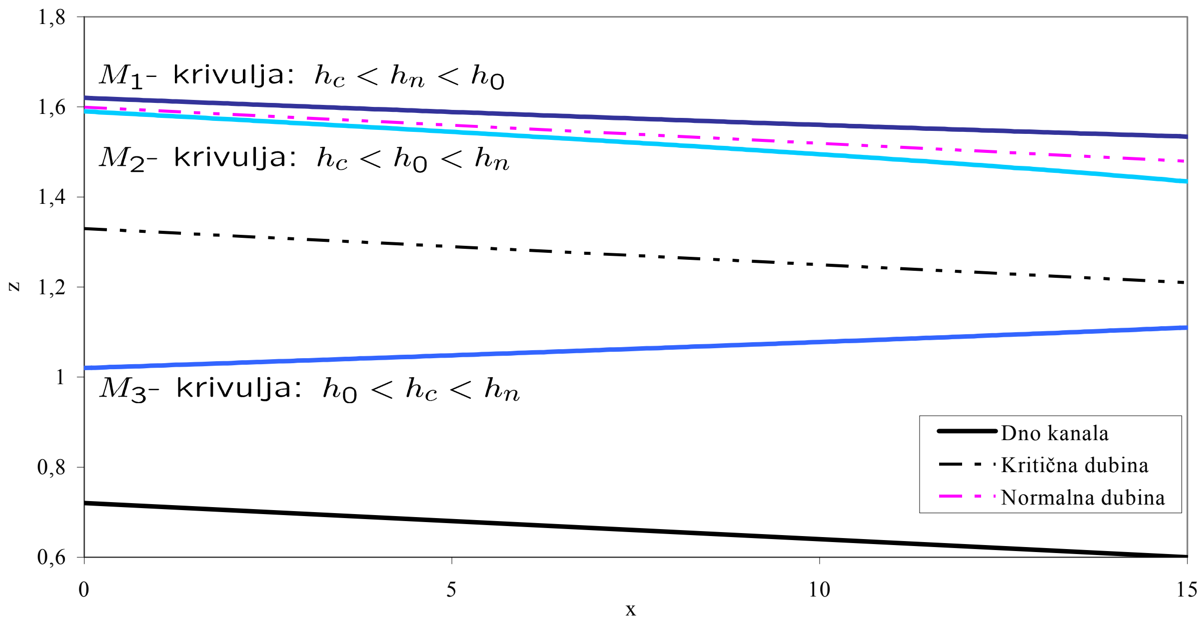
U tom se slučaju linija kritične dubine nalazi ispod linije normalne dubine. Tim je dvjema linijama područje strujanja podijeljeno u tri zone (vidi sliku 3.).

Oblik rješenja, dakle vodno lice, ovisi o početnom uvjetu. Tražena se rješenja određuju iz diferencijalne jednadžbe (7), koja se za promatrani pravokutni prizmatični kanal može zapisati u obliku:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - \left(\frac{y_n}{y}\right)^{10/3}}{1 - \left(\frac{y_c}{y}\right)^3} \tag{12}$$

U ovisnosti o zoni u kojoj se nalazi početni uvjet, dakle početna dubina ovisi sami oblik rješenja. Značajno je naglasiti da dubina vode, odnosno rješenje ne može prijeći diferencijalne jednadžbe iz jedne u drugu zonu – dakle, ako je početni uvjet u zoni 1, vodno lice ostati će u zoni 1. Pripadajuća se krivulja naziva M1 krivulja.

Razlikujemo M1, M2 i M3 krivulje. (Slika 1.6)
Vrijedi: - za $y_c < y_n < y_0$ rješenje je $M1$-krivulja
- za $y_c < y_0 < y_n$ rješenje je $M2$-krivulja
- za $y_0 < y_c < y_n$ rješenje je $M3$-krivulja



Slika 3. Vodno lice u kanalima s blagim nagibom za različite početne uvjete.

U točkama u kojima se dogodi prijelaz iz jedne u drugu zonu, rješenje zapravo ne zadovoljava diferencijalnu jednadžbu (to su slučajevi u kojima je nazivnik u diferencijalnoj jednadžbi jednak 0, dakle točke u kojima se dostigne kritičan tok).

Primjeri u kojima se pojavljuju promatrane krivulje:

M1-krivulja – podkritično strujanje (Fr<1) - utok u jezero;
M2-krivulja – prijelaz iz podkritičnog u nadkritično strujanje kod kanala čiji se nagib poveća; strujanje prije prijelaza u nadkritično ima oblik M2-krivulje
M3-krivulja – prijelaz iz nadkritičnog u podkritično strujanje npr. strujanje ispod zapornice; dio krivulje prije prijelaza u podkritični tok ima oblik M3-krivulje

Na sličan se način rješenja mogu dobiti i za veće nagibe kanala (***steep slope***) – kada je $y_c > y_n$. U tom slučaju rješenja imaju oblik tzv. *S*-krivulja.