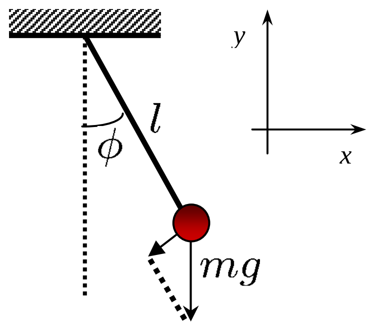
MODELI TEMELJENI NA DIFERENCIJALNIM JEDNADŽBAMA VIŠEG REDA I NA SUSTAVIMA DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

MATEMATIČKO NJIHALO



Jednadžba koja opisuje gibanje matematičkog njihala proizlazi iz drugog Newtonovog zakona

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}\,, \tag{1}$$

pri čemu je $\vec{F} = -mg\,\vec{j}$.

S druge strane trajektoriju gibanja možemo opisati izrazom

$$\vec{r}(t) = l\sin\phi\,\vec{i} - l\cos\phi\,\vec{j} \tag{2}$$

iz čega slijedi

$$\vec{v}(t) = l\dot{\phi}\cos\phi\,\vec{i} + l\dot{\phi}\sin\phi\,\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = l(-\dot{\phi}^2\sin\phi + \ddot{\phi}\cos\phi)\,\vec{i} + l(\dot{\phi}^2\cos\phi + \ddot{\phi}\sin\phi)\,\vec{j}\,.$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza u (1) i izjednačavanjem vektorskih komponenata dobijemo

$$l(-\dot{\phi}^2\sin\phi + \ddot{\phi}\cos\phi) = 0$$

$$l(\dot{\phi}^2\cos\phi + \ddot{\phi}\sin\phi) = -g\,.$$

Množenjem prve jednadžbe s $\cos\phi$, a druge sa $\sin\phi$, te njihovim zbrajanjem dobijemo diferencijalnu jednadžbu matematičkog njihala

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0\,. \tag{3}$$

Kod modeliranja promatranog problema potrebno je, nravno, zadati i početne uvjete tj. početni položaj $\phi(0)$ i početnu brzinu $\dot{\phi}(0)$.

Dobivena diferencijalna jednadžba vrijedi u slučaju kada nema trenja. Kod prisutnosti trenja pretpostavimo da je sila trenja proporcionalna brzini gibanja, pa dobijemo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + c\frac{d\phi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0\,, \tag{4}$$

gdje je c koeficijent trenja tj. parametar kojim se modelira intenzitet trenja.

Obje jednadžbe su **nelinearne** diferencijalne jednadžbe drugog reda. Njihovo analitičko rješenje nije nam poznato. Da bi odredili numeričko rješenje, prevedemo jednadžbu drugog reda na sustav dviju jednadžbi prvog reda: definiramo

$$y_1(t) = \phi(t)$$

$$y_2(t) = \dot{\phi}(t)\,.$$

Potom je

$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = \ddot{\phi} = -c\dot{\phi} - \frac{g}{l}\sin\phi = -cy_2 - \frac{g}{l}\sin y_1 , \tag{5}$$

a zadani početni uvjeti su $y_1(0)$ i $y_2(0)$.

Uočimo da je dobiveni sustav oblika

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(t, y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= f_2(t, y_1, y_2) \end{aligned}.$$

To je sustav dviju diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Dobiveni sustav riješimo numerički koristeći neku od numeričkih metoda.

Vrlo se često, da bi odredili analitičko rješenje, provodi linearizacija gornjih jednadžbi. Naime, iz razvoja funkcije $\sin\theta$ u Taylorov red, za male kuteve θ slijedi: $\sin\theta \approx \theta$, pa pripadajuća linearizirana jednadžba, za slučaj bez trenja, glasi:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\phi = 0. \tag{6}$$

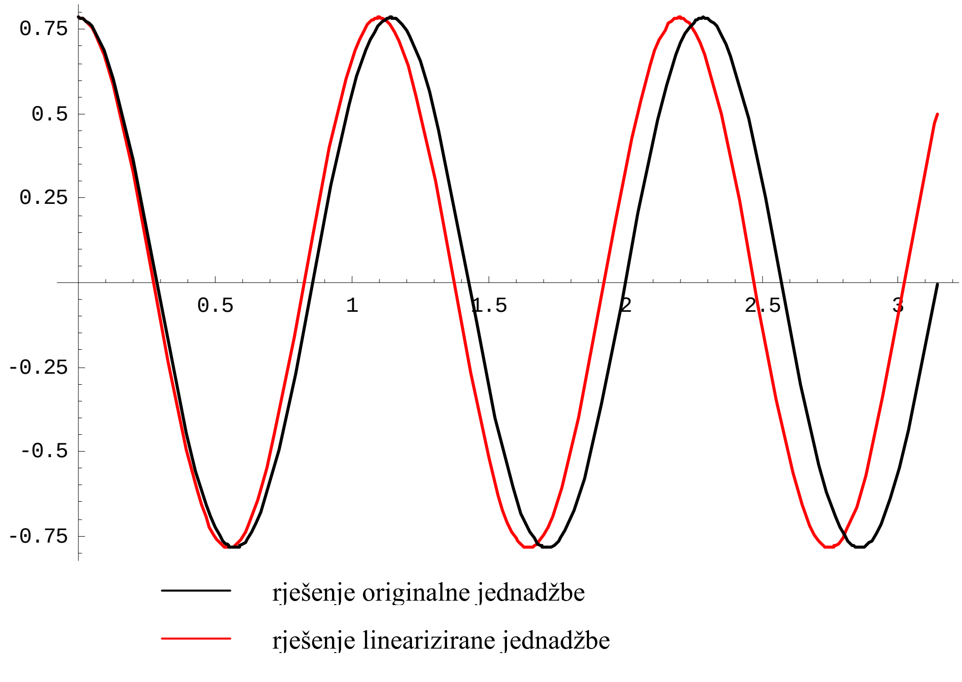
Dobivena je linearna jednadžba drugog reda čije analitičko rješenje znamo odrediti i jednako je

$$\phi(t) = C_1 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t .$$

Koeficijenti C_1 i C_2 odrede se iz početnih uvjeta.

Važno je naglasiti pojavu greške koja nastaje kod linearizacije sustava. Takva se greška lijepo može uočiti na Slici 2.

Na Slici 2. je prikazano rješenje za: $l = 0.3;\ \phi(0) = \frac{\pi}{4},\ \dot{\phi}(0) = 0$.



Slika 2.

Primjer. Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda dobiju se kod modeliranja vibracija u sustavu s elastičnom oprugom, pri čemu se dobije diferencijalna jednadžba

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=f(t)\,, \tag{7}$$

gdje je $x=x(t)$ odmak utega iz ravnotežnog položaja, c je koeficijent prigušenja, k je konstanta opruge, dok je $f(t)$ vanjska sila sustava. Za potpuno zadavanje postavkjenog problema potrebno je poznavati početni položaj $x(0)$ i početnu brzinu $\dot{x}(0)$.

Primjer. Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda dobiju se kod modeliranja *RLC* električnog kruga. Diferencijalna jednadžba kojom je opisana jakost struje $i=i(t)$ dana je s

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+Ci=\frac{du}{dt}(t)\,. \tag{8}$$

Ovdje je L induktivitet zavojnice, R otpor, C kapacitet kondenzatora, a $u=u(t)$ elektromotorna sila izvora. Da bi postavljeni problem mogli riješiti potrebno je zadati dva početna uvjeta.

Sustavi diferencijalnih jednadžbi 1. reda i diferencijalne jednadžbe višeg reda

Općeniti **sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda** možemo zapisati u obliku:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x))\\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x))\\
&\vdots\\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x,y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x))
\end{aligned} \tag{9}$$

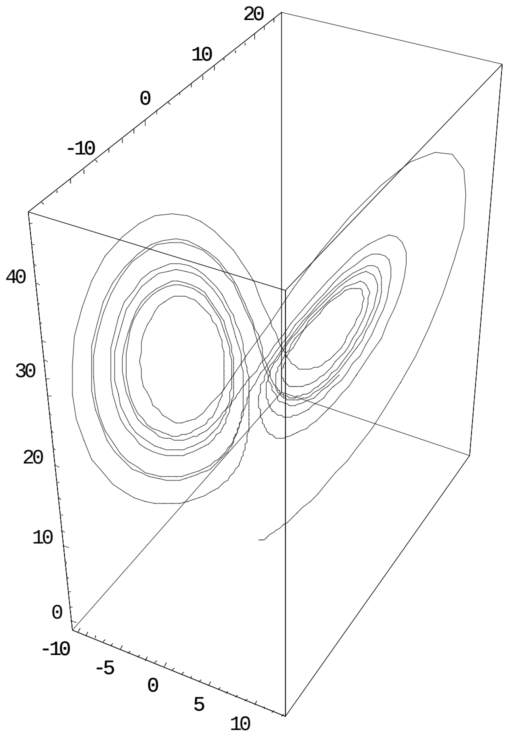
Ovdje je x nezavisna varijabla, $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ su nepoznate funkcije. Potrebno je zadati i n početnih uvjeta tj. $y_1(x_0),\ldots,y_n(x_0)$.

LORENTZOV ATRAKTOR

Lorentzov atraktor je rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi koje se dobiju kod modeliranja atmosfere. Zamislimo dio atmosfere oblika pravokutne ploče, koji se grije odozdo, a hladi odozgo, dok je na bočnim rubovima temperatura konstantna. Topli zrak se diže, a hladni se spuša, te nastaje tolinski protok kojim toplina struji od dna prema vrhu.
Ako označimo s x – konvektivni tok, y – horizontalna razdioba temperature, z – vertikalna razdioba temperature. Nadalje označimo s σ koeficijent viskoznosti (termalna konduktivnost), ρ temperaturna razlika između vrha i dna te koeficijent β kvocijent između širine i visine područja. Pripadajući sustav diferencijalnih jednadžbi glasi:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \sigma(-x+y) \\
\frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\
\frac{dz}{dt} &= xy - \beta z
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Ovdje je t vrijeme. Ovakav sustav je **nelinearan** i nije ga moguće riješiti analitički. Numerički dobiveno rješenje za slučaj $\sigma = 3$, $\rho = 26.5$ i $\beta = 1$, uz početne uvjete $x(0) = z(0) = 0$ i $y(0) = 1$ prikazano je na Slici 3.



Slika 3.

PREDATOR-PREY SUSTAV

Značajan sustav u populacijskoj dinamici je tzv. *predator - prey* sustav diferencijalnih jednadžbi. Sustav je **nelinearan** i oblika

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= ay_1 - by_1y_2 \\
\frac{dy_2}{dt} &= cy_1y_2 - dy_2
\end{aligned}
. \tag{11}
$$

$y_1 = y_1(t)$ prestavlja populaciju žrtve (prey), a $y_2 = y_2(t)$ populaciju grabežljivaca (predator). Zbog kvadratnog člana y_1y_2, koji pogoduje razvoju populacije grabežljivaca, a smanjenju populacije žrtvi, sustav jednadžbi je nelinearan i njegovo analitičko rješenje ne znamo odrediti. Numerička rješenja se naravno mogu odrediti.

Primjer: $y_1 = y_1(t)$ može predstavljati populaciju sitne, a $y_2 = y_2(t)$ populaciju krupne ribe u nekom moru ili području. U tom se slučaju pomoću koeficijenta a modelira brzina reprodukcije sitne ribe, dok je b koeficijent kojim se određuje vjerojatnost da će krupna riba pojesti sitnu ribu. Nadalje parametar c je predstavlja mjeru za porast populacije krupne ribe, kad ona pojede sitnu ribu, dok parametar d služi za modeliranje opadanja popluacije krupne ribe, u slučaju kada nema dovoljno sitne ribe.

Zanimljivo je promatrati rješenja sustava (11) u tzv. faznoj ravnini (faznom prostoru). To izgleda kao da smo izgubili vremensku dimenziju. Kao kod prikazivanja orbita pojedinih planeta, i ovdje se put crta bez pamćenja vremenskog trenutka u kojem smo prošli određenom točkom. Da bi odredili rješenja u faznoj $y_1 - y_2$ ravnini, riješimo se ovisnosti o vremenu. Jasno je da iz (11) slijedi:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{cy_1y_2 - dy_2}{ay_1 - by_1y_2} = \frac{(cy_1 - d)y_2}{(a - by_2)y_1}. \tag{12}$$

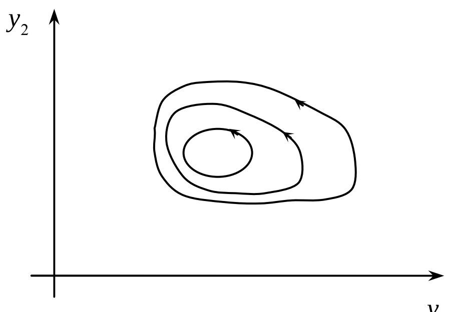
Uočimo da je za $y_1 = \frac{c}{d}$ brojnik gornjeg izraza jednak nuli, što znači da je nagib krivulje jednak nula, odnosno krivulja je horizontalna. Za $y_2 = \frac{a}{b}$ je nazivnik jednak nuli, pa je krivulja vertikalna. Jednadžbu (12) možemo riješiti separacijom varijabli

$$\frac{(a - by_2)dy_2}{y_2} = \frac{(cy_1 - d)dy_1}{y_1}$$

$$\left(\frac{a}{y_2} - b\right)dy_2 = \left(c - \frac{d}{y_1}\right)dy_1$$

$$a \log y_2 - by_2 = cy_1 - d \log y_1 + konst.$$

Dobivena krivulja je eliptičnog oblika, zavisi o početnom uvjetu na osnovu kojeg se odredi vrijednost konstante. Krivulja je zatvorena, što znači da je predator-prey populacija ciklička.



Slika 4.

NAPOMENA: Na sličan se način, u faznoj ravnini, mogu promatrati rješenja prije definiranih diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

Promatrajmo općenitu **diferencijalnu jednadžbu višeg reda** oblika

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) . \qquad (13)$$

Iz gornje jednadžbe slijedi veza između nezavisne varijable x, nepoznate funkcije $y(x)$ i njezinih derivacija. Da bi početni problem bio u potpunosti definiran potrebno je zadati i n početnih uvjeta: $y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$.

Diferencijalnu jednadžbu višeg reda možemo prevesti na sustav n jednadžbi prvog reda, tako da definiramo

$$y_1(x) = y(x); \;\; y_2(x) = y'(x); \;\; \ldots ; y_n(x) = y^{(n-1)}(x) . \qquad (14)$$

Dobiveni sustav je

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3 \\ &\vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \; . \qquad (15)$$

Isto tako iz postavljenih početnih uvjeta (1.19) možemo dobiti početne uvjete gornjeg sustava.

Numeričko rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi prvog reda

Za rješavanje sustava možemo primijeniti prije definirane numeričke sheme tj. Eulerovu metodu, Runge-Kutta itd. Navedene se sheme primijenjuju po komponentama sustava. Sasvim je jasno da će takav pristup biti odgovarajući, jer se u svim promatranim shemama, vrijednost u sljedećem koraku izračuna na osnovu poznatih vrijednosti iz prethodnog proračunskog koraka.

LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 2. REDA

Promatrat ćemo linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda oblika

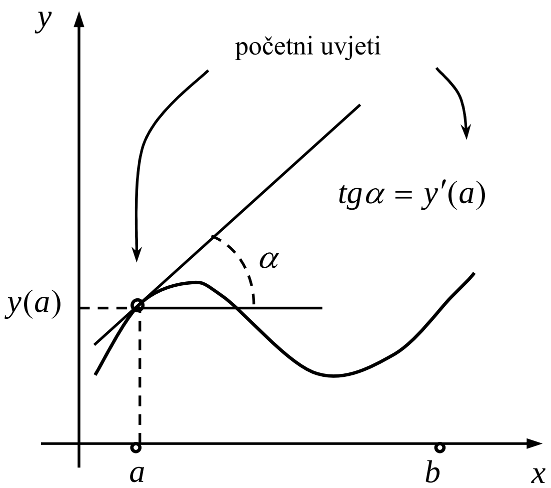
$$y''(x) - p(x) \cdot y'(x) - q(x) \cdot y(x) = f(x). \tag{16}$$

Tražimo rješenje postavljene jednadžbe na intervalu $[a,b]$.

Razlikujemo dvije klase problema

a) **PROBLEM SA POČETNIM VRIJEDNOSTIMA**

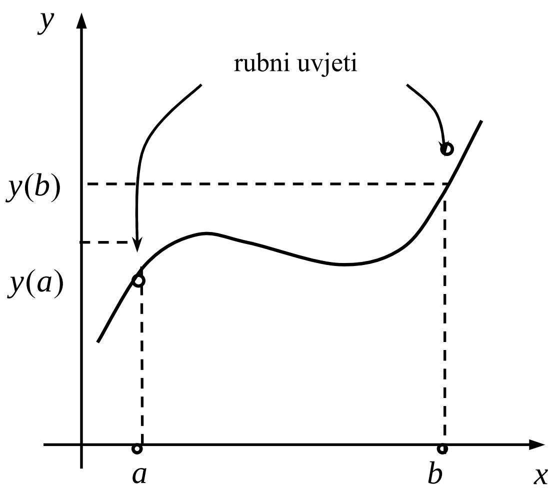
zadane su početne vrijednosti $y(a)$, $y'(a)$



Slika 5.

b) **PROBLEM SA RUBNIM UVJETIMA**

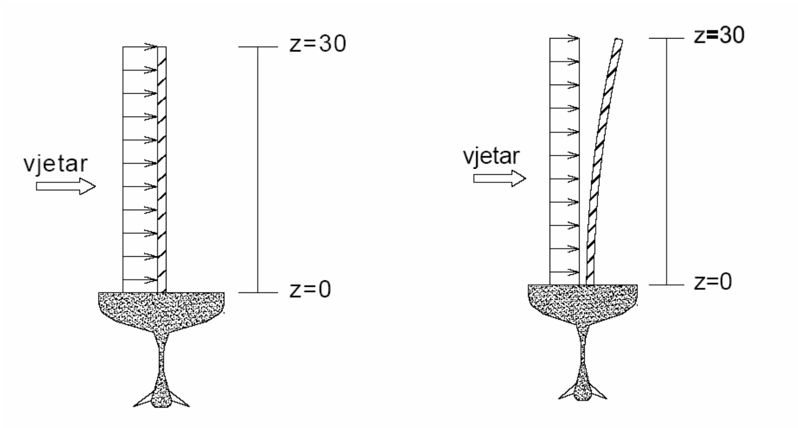
zadane su vrijednosti $y(a)$, $y(b)$



Slika 6.

POČETNI PROBLEM

ODREĐIVANJE PROGIBNE LINIJE JARBOLICE



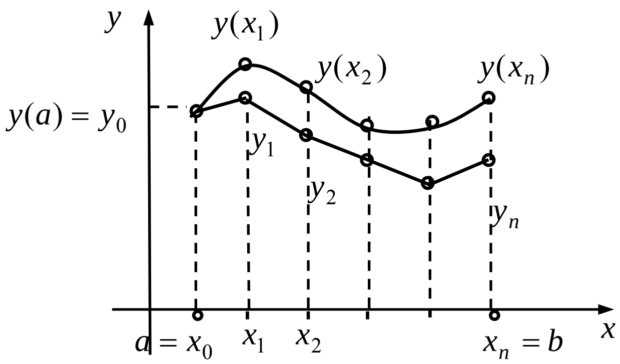
Slika 7.

Diferencijalna jednadžba kojom se modelira progibna linija jarbolice glasi

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{f}{2EI}(L-z)^2, \tag{17}$$

gdje je L duljina, f vanjska sila po jedinici duljine, EI je fleksijska krutost. S obzirom da je jarbol fiksiran na jedrilici, odgovarajući početni uvjeti postavljenog problema su: $y(0)=0$ i $\frac{dy}{dz}(0)=0$. Diferencijalna jednadžba je linearna i možemo je riješiti nekom od metoda opisanih u nastavku.

Interval $[a,b]$ podijelimo na n jednakih podintervala s točkama $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$, gdje je $x_i = x_0 + i \cdot h, \quad h = \frac{b-a}{n}$. Za postavljene početne uvjete zatim tražimo aproksimacije rješenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ u tim točkama.



Slika 8.

a) Prevođenje na sustav diferencijalnih jednadžbi 1. reda

Kao što je objašnjeno u prethodnom poglavlju, postavljeni se problem može prevesti na početni problem za sustav diferencijalnih jednadžbi.

b) Metoda konačnih razlika

Sustav možemo rješavati direktno, koristeći konačne razlike za aproksimacije derivacija u promatranoj točki. Naime, kao što znamo, $y'(x_i)$ predstavlja smjerni koeficijent tangente u točki x_i. S obzirom da tangentu možemo shvatiti kao granični slučaj sekante, očekujemo da će smjerni koeficijent tangente biti dobar približak za $y'(x_i)$. Navedenu aproksimaciju možemo dobiti na više različitih načina (Slika 9). Aproksimaciju

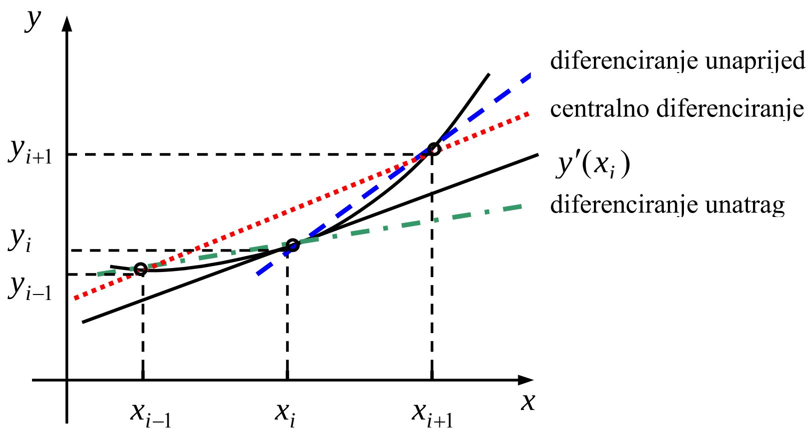
$$\boxed{y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}} \tag{18}$$

dobijemo **diferenciranjem unaprijed (*forward differencing*)**. **Diferenciranjem unatrag (*backward differencing*)** dobijemo izraz

$$\boxed{y'(x_i) \approx \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h}}, \tag{19}$$

a **centralnim diferenciranjem (*central differencing*)** izraz

$$\boxed{y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}}. \tag{20}$$



Slika 9.

Razvojem funkcije $y(x)$ u okolini točke x_i u Taylorov red može se pokazati da je greška koju napravimo diferenciranjem unaprijed, odnosno unatrag, reda $O(h)$, dok je greška kod centralnog diferenciranja reda $O(h^2)$.

Za numeričku aproksimaciju druge derivacije koristiti ćemo činjenicu da je druga derivacija zapravo prva derivacija derivacije funkcije tj. aproksimacijom

$$\boxed{\begin{aligned} y''(x_i) &\approx \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{h} \approx \frac{\frac{y(x_{i+2}) - y(x_{i+1})}{h} - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}}{h} \\ &= \frac{y(x_{i+2}) - 2y(x_{i+1}) + y(x_i)}{h^2} \end{aligned}} \tag{21}$$

dobijemo **drugu podijeljenu razliku unaprijed.** Na sličan način dobijemo **drugu podijeljenu razliku unatrag**,

$$\boxed{y''(x_i) = \frac{y(x_i) - 2y(x_{i-1}) + y(x_{i-2})}{h^2}}, \tag{22}$$

odnosno **drugu centralnu podijeljenu razliku**.

$$\boxed{y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}}. \tag{23}$$

Uvrštavanjem definiranih podijeljenih razlika u zadanu diferencijalnu jednadžbu (1.21) možemo numerički odrediti njezino rješenje.

Najprije, iz zadanih početnih uvjeta slijedi

$$y_0 = y(x_0) \tag{24a}$$

i

$$y'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} \Rightarrow y_1 = y_0 + h. \tag{24b}$$

Rekurzivno sada možemo u proizvoljnoj točki intervala odrediti aproksimaciju za vrijednost rješenja. Naime, uvrštavanjem podijeljenih razlika dobijemo izraz

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - p(x_i)\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - q(x_i)\,y_i = f(x_i) \tag{24c}$$

iz kojeg odredimo vrijednost y_{i+1}, koristeći vrijednosti y_{i-1} i y_i koje smo odredili u prethodnim koracima. Postupak ponavljamo za $i = 1, \ldots, n-1$. Opazimo, da je ovako dobivena metoda, određena s izrazima (24a)-(24c) eksplicitna. Korištenjem drugih podijeljenih razlika moguće je, naravno, dobiti i implicitnu metodu.

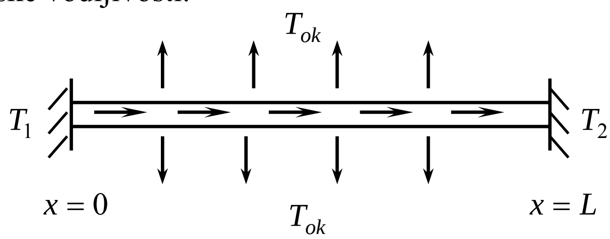
RUBNI PROBLEM

ODREĐIVANJE TEMPERATURE U ŠTAPU

Promatrajmo jednadžbu očuvanja topline tankog dugačkog homogenog neizoliranog štapa. U stacionarnom stanju jednadžba je dana s

$$\frac{d^2T}{dx^2} + k(T_{ok} - T) = 0 \tag{25}$$

gdje je $T = T(x)$ temperatura štapa na udaljenosti x, T_{ok} je temperatura okoline, a k koeficijent toplinske vodljivosti.



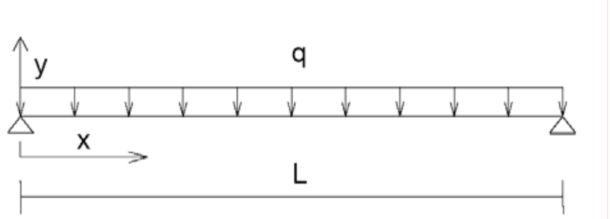
Slika 10.

Da bi odredili rješenje ovog problema, potrebno je postaviti odgovarajuće rubne uvjete, npr. zadati temperaturu na krajevima štapa

$$T(0) = T_1 \quad \text{i} \quad T(L) = T_2 \,.$$

Ovdje se dakle radi o ***rubnom problemu.*** Problem sa zadanim rubnim uvjetima znatno je teži od problema sa zadanim početnim vrijednostima.

SAVIJANJE PROSTE GREDE



Slika 11.

Odgovarajuća diferencijalna jednadžba koja opisuje savijanje proste grede, odnosno diferencijalna jednadžba elastične linije nosača, jednaka je

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \tag{26}$$

gdje je $y = y(x)$ odmak iz ravnotežnog položaja, $M = M(x)$ moment savijanja, E modul elastičnosti, a I inercijalni moment. U promatranom su slučaju rubni uvjeti dani s

$$y(0) = 0 \quad \text{i} \quad y(L) = 0 \,.$$

***a) Metoga gađanja* (*shooting method*)**

Promatrajmo diferencijalnu jednadžbu (16) s rubnim uvjetima

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \ . \tag{27}$$

Postavljeni problem prevedemo na sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= p(x)z + q(x)y + f(x) \end{aligned} . \tag{28}$$

Kod dobivenog sustava jedan nam je početni uvjet poznat, tj. $y(a) = y_a$, dok nam je drugi

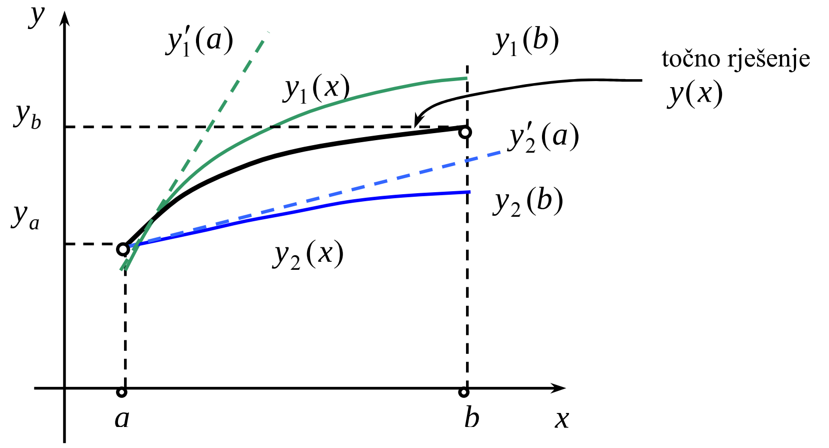
$$z(a) = y'(a) = ?$$

nepoznat.

Ideja metode gađanja je zapravo metoda pokušaja i pogrešaka. Naime, pokušamo pogoditi vrijednost $y'(a)$. Za neku odabranu vrijednost nađemo rješenje sustava. To će biti rješenje postavljenog problema samo ako dobiveno rješenje $\tilde{y}(x)$ zadovoljava uvjet $\tilde{y}(b) = y_b$, što najčešće neće biti slučaj.

Da bi odredili ispravnu vrijednost $y'(a)$ s kojom ćemo dobiti rješenje problema odaberemo dvije vrijednosti $y_1'(a)$ i $y_2'(a)$, te nađemo pripadajuća rješenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ (Slika 1.20). Pretpostavimo da vrijedi

$$y_1(b) > y_b \quad \text{i} \quad y_2(b) < y_b .$$



Slika 12.

Nadamo se da ćemo ispravno rješenje dobiti ako uzmemo linearnu kombinaciju tj. za

$$y'(a) = \alpha\, y_1'(a) + (1-\alpha)\, y_2'(a) . \tag{29}$$

S obzirom da je jednadžba linearna očekujemo da je parametar α najbolje odabrati tako da vrijedi

$$y_b = \alpha\, y_1(b) + (1-\alpha)\, y_2(b) \Rightarrow \alpha = \frac{y_b - y_2(b)}{y_1(b) - y_2(b)} .$$

Ako za odabranu aproksimaciju $y'(a)$ ne dobijemo točno rješenje, ponavljamo postupak sve dok ne dobijemo rješenje koje zadovoljava rubni uvjet $y(b) = y_b$ (s određenom točnošću). Naravno, može se dogoditi da rješenje koje zadovoljava postavljene rubne uvjete ne postoji.

b) Metoda konačnih razlika

Drugi je način rješavanja rubnog problema pomoću metode konačnih razlika. Kao i kod početnog problema, interval najprije podijelimo u n dijelova. S obzirom na postavljene rubne uvjete, imamo

$$y(x_0) = y_0 = y_a \quad \text{i} \quad y(x_n) = y_n = y_b \ , \tag{30}$$

tj. poznate su nam vrijednosti y_0 i y_n. Koristeći metode konačnih razlika (18)-(24) za svaku točku mreže x_i, iz jednadžbe (169) dobijemo

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - p(x_i)\,\frac{y_i - y_{i-1}}{h} - q(x_i)\, y_i = f(x_i). \tag{31}$$

Za razliku od početnog problema, sada rješenja ne možemo odrediti rekurzivno jer nam vrijednost y_1 nije poznata. Umjesto toga, raspisivanjem jednadžbi oblika (31) za svaki $i = 1,\ldots,n-1$ dobijemo sustav $n-1$ jednadžbi za $n-1$ nepoznatih vrijednosti $y_1,\ldots,y_{n-1}$.

$$i = 1: \quad \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - p(x_1)\,\frac{y_1 - y_0}{h} - q(x_1)\, y_1 = f(x_1)$$

$$i = 2: \quad \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} - p(x_2)\,\frac{y_2 - y_1}{h} - q(x_2)\, y_2 = f(x_2)$$

$$\vdots$$

$$i = n-1: \quad \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} - p(x_{n-1})\,\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h} - q(x_{n-1})\, y_{n-1} = f(x_{n-1})$$

Grupiranjem koeficijenata uz nepoznanice sustava i prebacivanjem poznatih vrijed-nosti na desnu stranu sustava, dobijemo sustav oblika

$$Ay = b$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix}
-\frac{2+p(x_1)h+q(x_1)h^2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \\
-\frac{1-p(x_2)h}{h^2} & -\frac{2+p(x_2)h+q(x_2)h^2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 & 0 & -\frac{1-p(x_{n-2})h}{h^2} & -\frac{2+p(x_{n-2})h+q(x_{n-2})h^2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\
 & & 0 & -\frac{1-p(x_{n-1})h}{h^2} & -\frac{2+p(x_{n-1})h+q(x_{n-1})h^2}{h^2}
\end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} f(x_1) - \frac{y_0}{h^2} - \frac{p(x_1)y_0}{h} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) - \frac{y_n}{h^2} - \frac{p(x_n)y_{n-1}}{h} \end{pmatrix}.$$

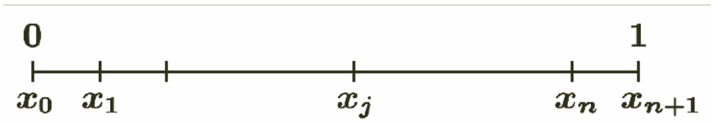
Opazimo da je matrica A trodijagonalna. Rješenje takvog sustava se prilično jednostavno odredi pomoću neke od metoda za rješavanje linearnog sustava.

$\boxed{\text{POSEBAN SLUČAJ (POISSONOVA JEDNADŽBA U 1D)}}$

$$\boxed{-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)}, \quad \boxed{u(0) = u(1) = 0}$$

Metoda konačnih razlika

Promatrani interval podijelimo u n jednakih dijelova. Ovdje je $x_j = j \cdot \Delta x$ i $u_j = u(x_j)$.



Ako za svaku unutarnju točku intervala, aproksimiramo gornju jednadžbu metodom konačnih razlika dobijemo

$$-\frac{1}{\Delta x^2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) = f_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Na osnovu postavljenih rubnih uvjeta imamo $u_0 = 0$ i $u_{n+1} = 0$.

Gornje jednadžbe čine sustav, koji možemo zapisati u obliku

$$\boxed{\mathbf{A}\hat{u} = \hat{f}}$$

gdje je

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Rješavanjem tog sustava, dobijemo numeričke aproksimacije rješenja promatrane diferencijalne jednadžbe.